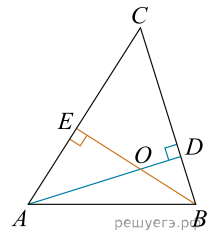


Вариант 103

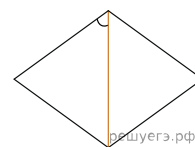
№ 1.

Два угла треугольника равны 58° и 72° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.



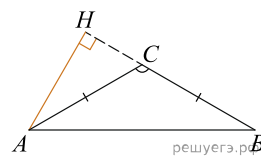
№ 2.

Угол между стороной и диагональю ромба равен 54° . Найдите острый угол ромба.



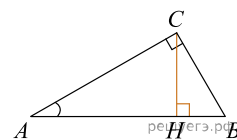
№ 3.

В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = 25$, высота AH равна 20. Найдите $\cos \angle ACB$.



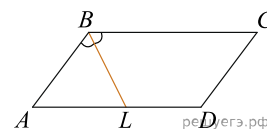
№ 4.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 3$, $\sin A = \frac{1}{6}$. Найдите AH .



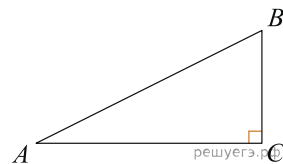
№ 5.

Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 4:3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.



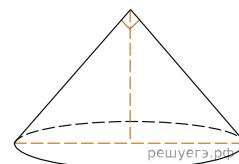
№ 6.

В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен $\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



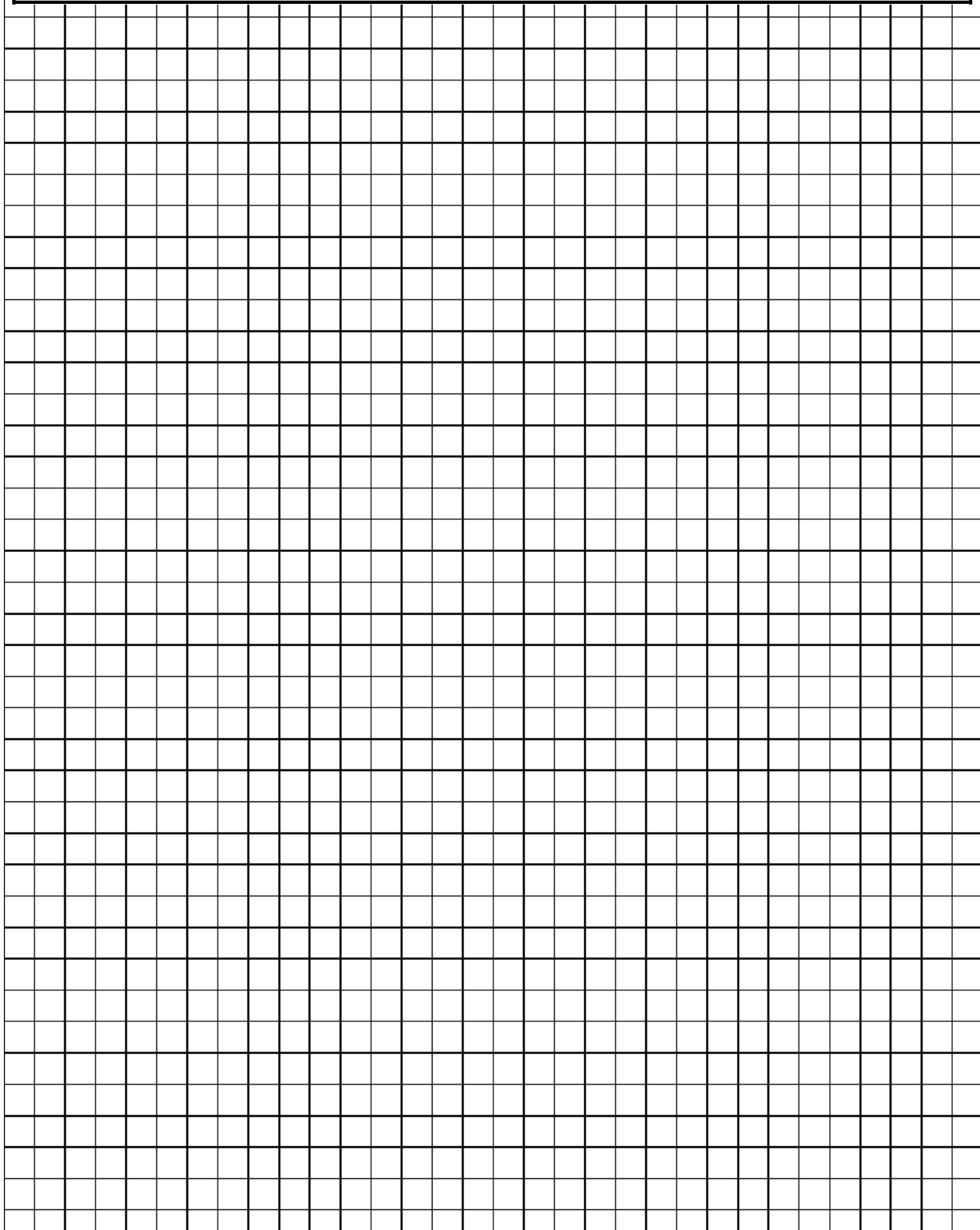
№ 7.

Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90° . Вычислите объем конуса, деленный на π .



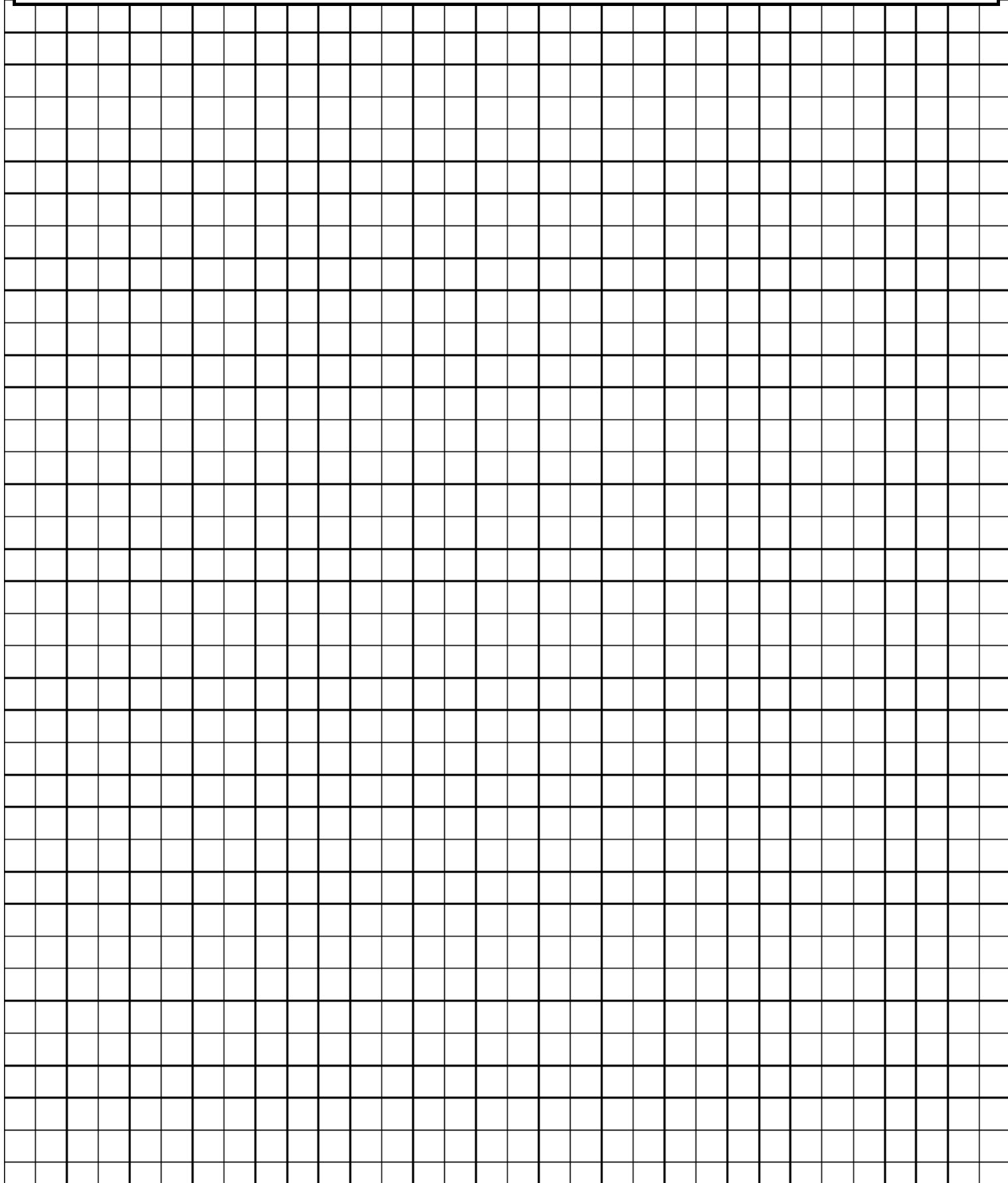
№ 8.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.



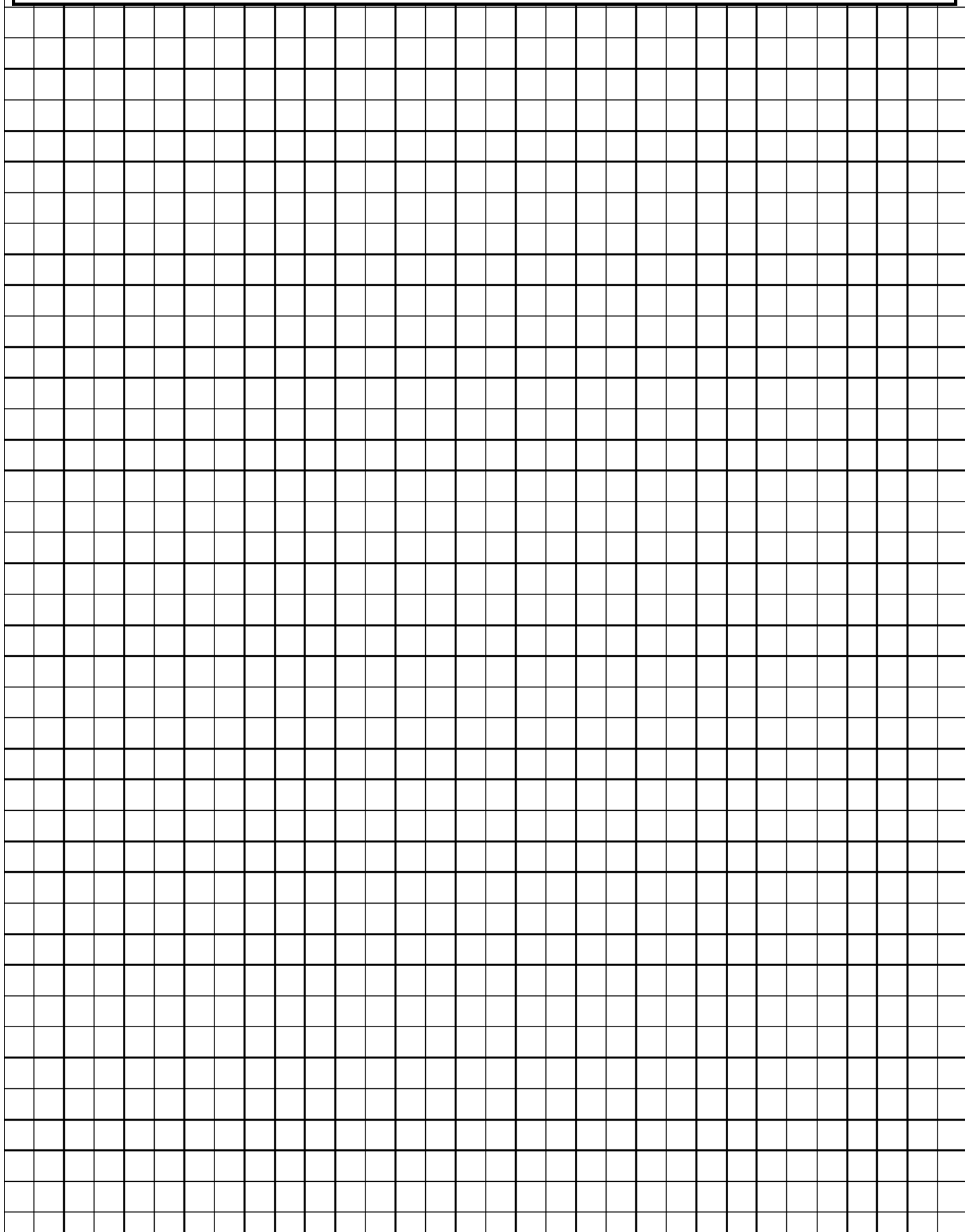
№ 9.

Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется *положительным*. У больных гепатитом пациентов анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.



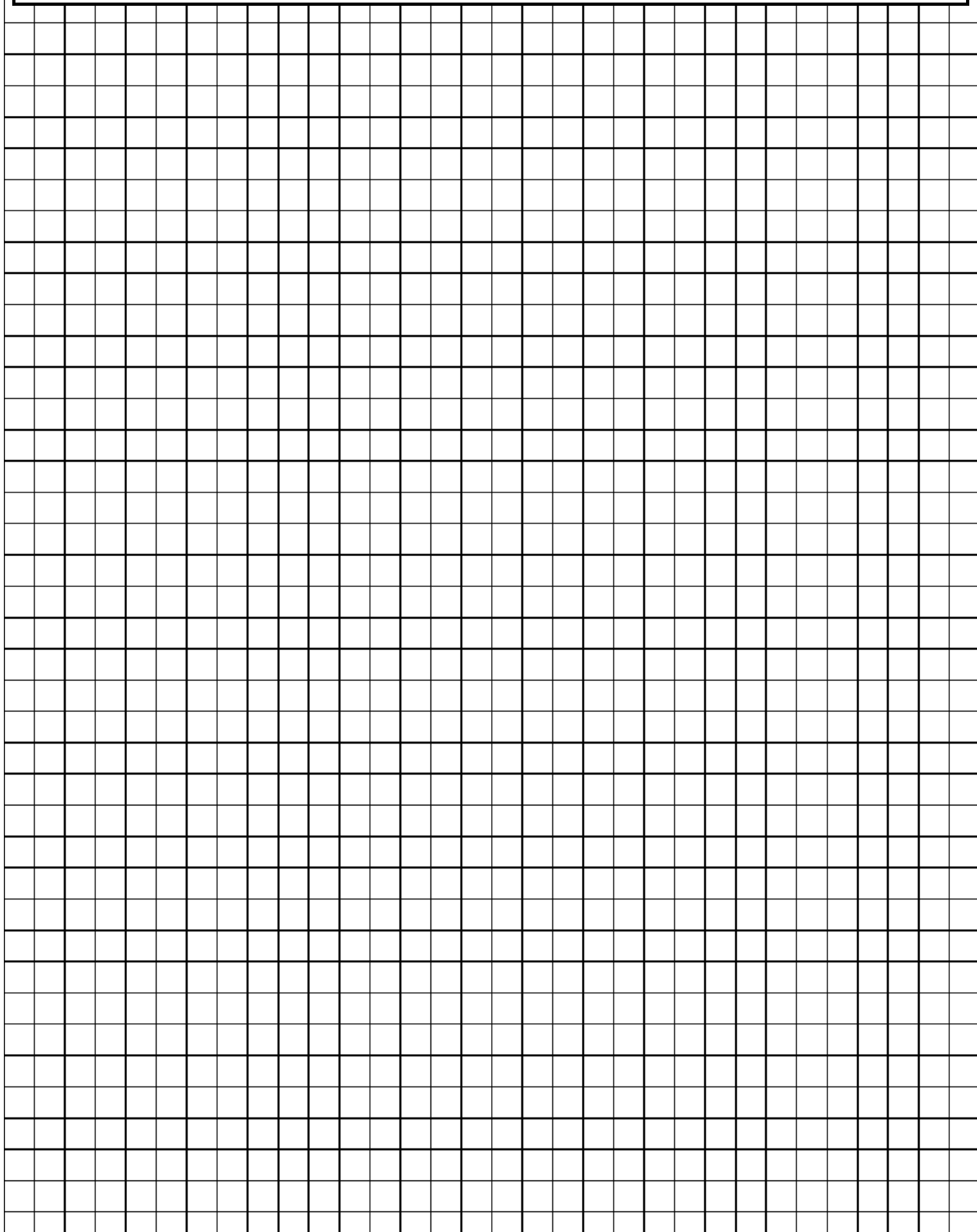
№ 10.

Найдите корень уравнения: $9^{-5+x} = 729$.



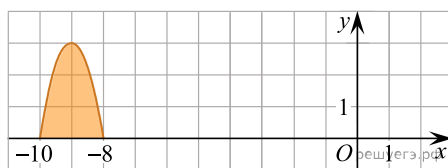
№ 11.

Найдите значение выражения $\frac{9ax - (-7xa)}{4ax}$.



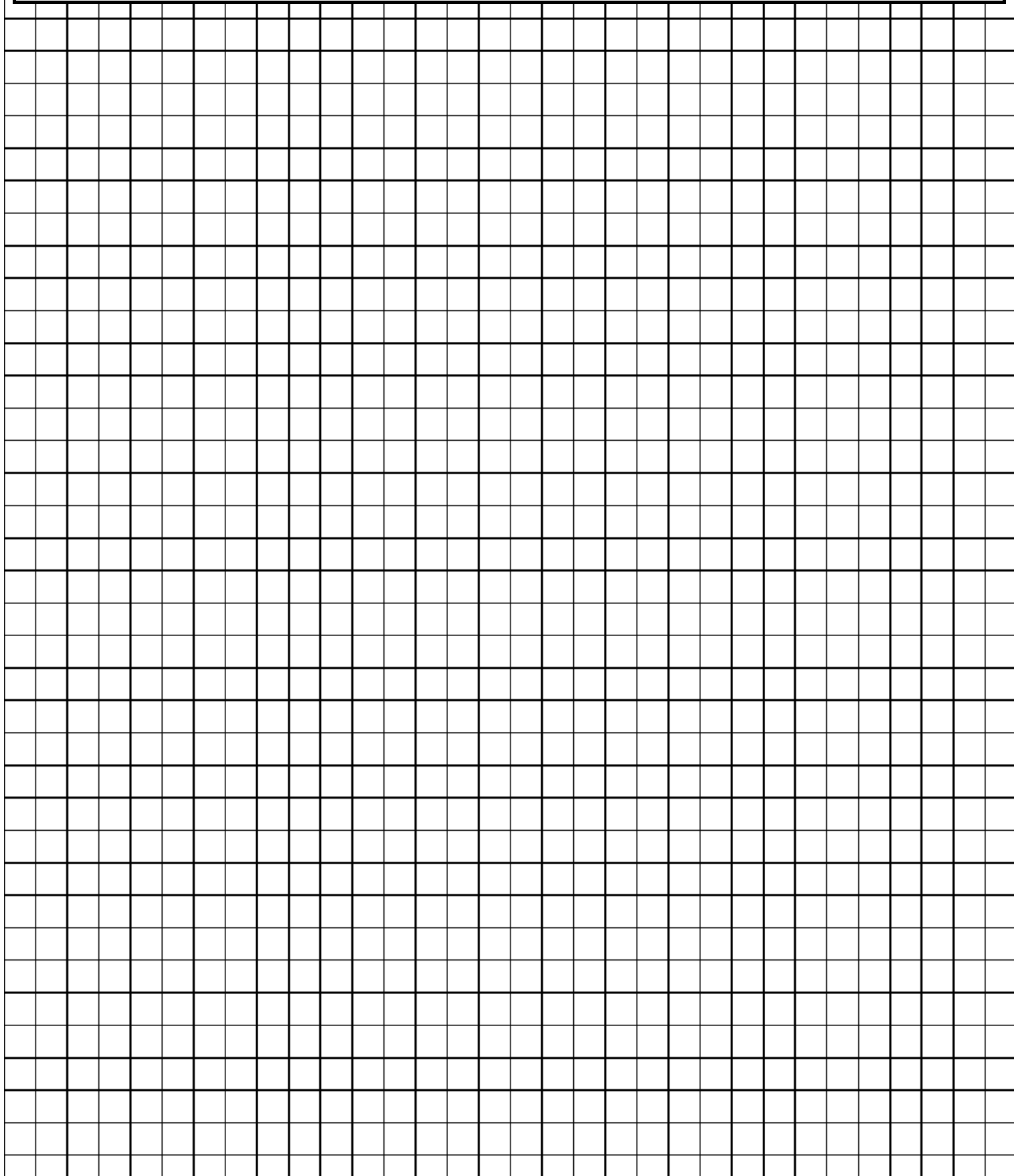
№ 12.

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



№ 13.

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с— скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 160 Гц?

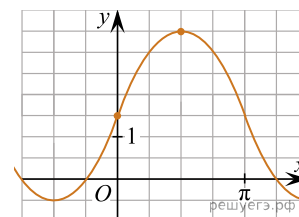


№ 14.

При двух одновременно работающих принтерах расход бумаги составляет 1 пачку за 12 минут. Определите, за сколько минут израсходует пачку бумаги первый принтер, если известно, что он сделает это на 10 минут быстрее, чем второй.

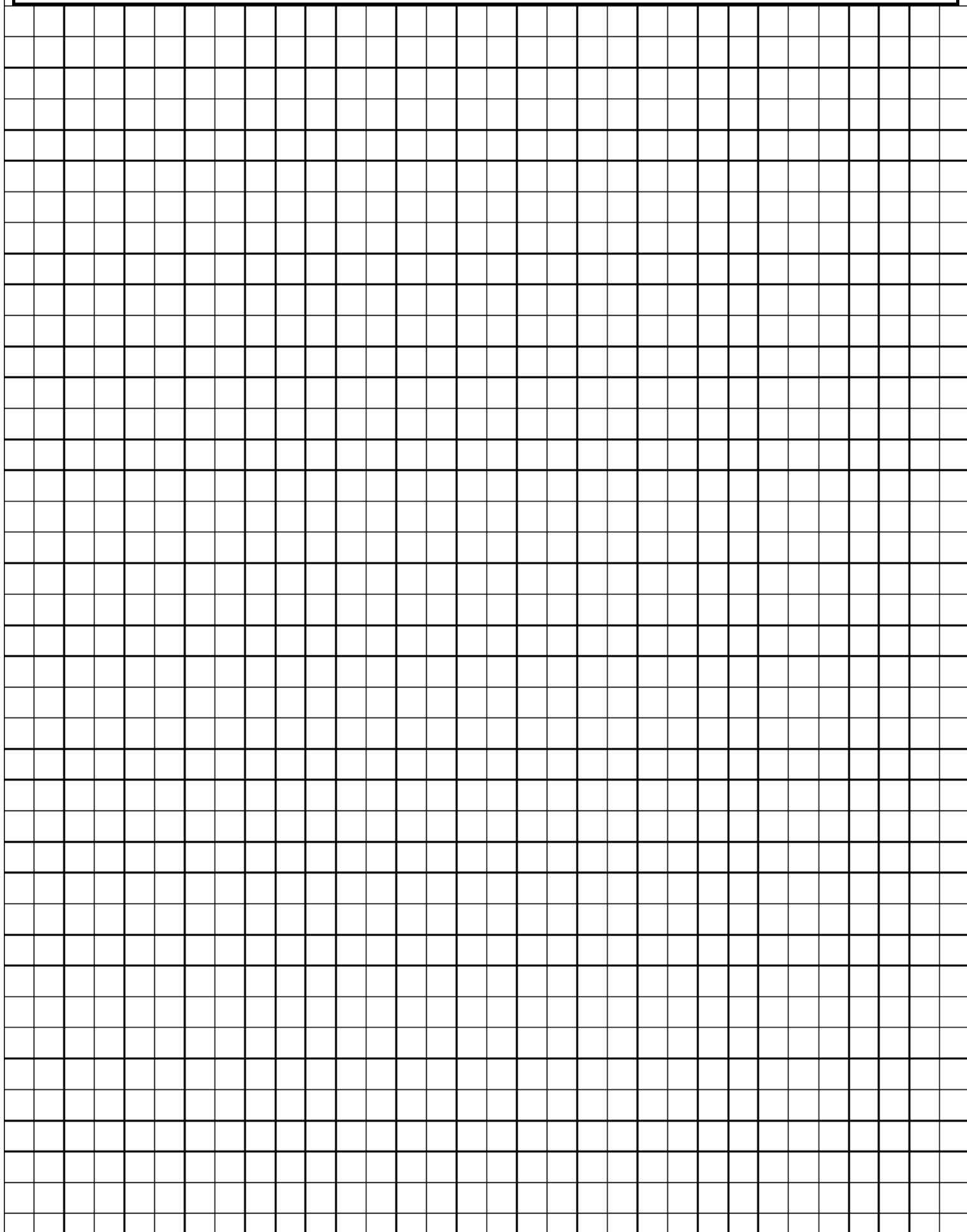
№ 15.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



№ 16.

Найдите точку максимума функции $y = (x+6)^2 e^{4-x}$.



№ 17.

а) Решите уравнение $\sin x(2 \sin x - 3 \operatorname{ctg} x) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

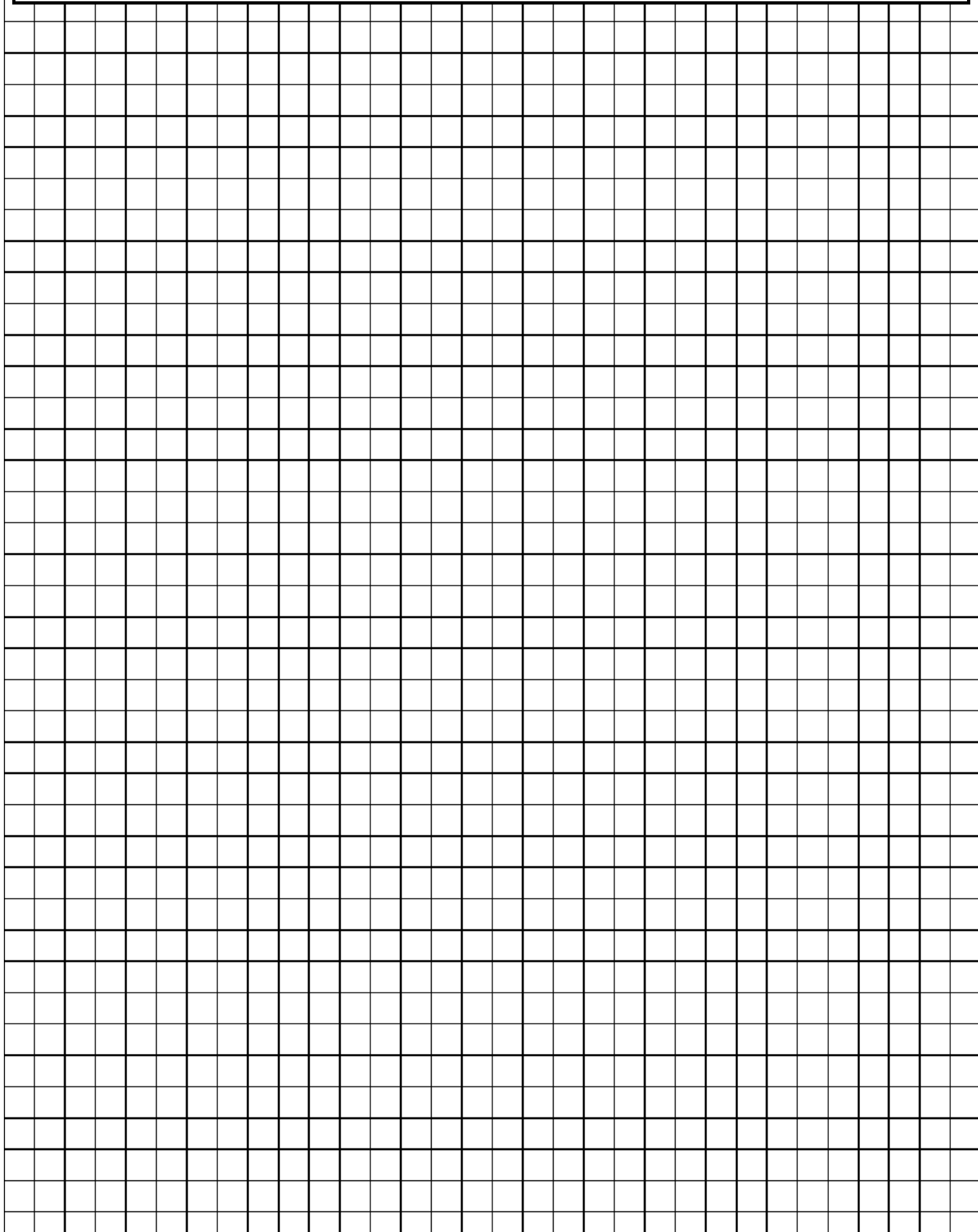
№ 18.

Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDABCD$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB . Через точки K и C проведена плоскость α , параллельная прямой BD .

- а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.
- б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α .

№ 19.

Решите неравенство $\frac{x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 3} + \frac{x^2 - 5x + 24}{x^2 - 5x} \leq 0$.



№ 20.

4 декабря 2020 года Ваня взял кредит на сумму 3 млн рублей. Условия возврата кредита таковы:

- 3-го числа каждого месяца долг возрастает на 10%;
- с 4-го по 25-е число каждого месяца, начиная с января 2021 года, необходимо погасить часть долга одним платежом;
- в период с 04.01.2021 по 25.01.2021 необходимо заплатить x тыс. руб.;
- с февраля по ноябрь 2021 года 26-го числа каждого месяца долг (вместе с начисленными процентами) должен быть меньше долга на 26-е число предыдущего месяца на одну и ту же величину;
- в период с 04.12.2021 по 25.12.2021 необходимо заплатить x тыс. руб.;
- к 26.12.2021 кредит должен быть полностью погашен.

Общая сумма выплат составит 5,06 млн руб. Найдите x .

№ 21.

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC , причем $AD = 2BC$, и точка M внутри трапеции, такая, что $\angle ABM = \angle DCM = 90^\circ$.

а) Докажите, что $AM = DM$.

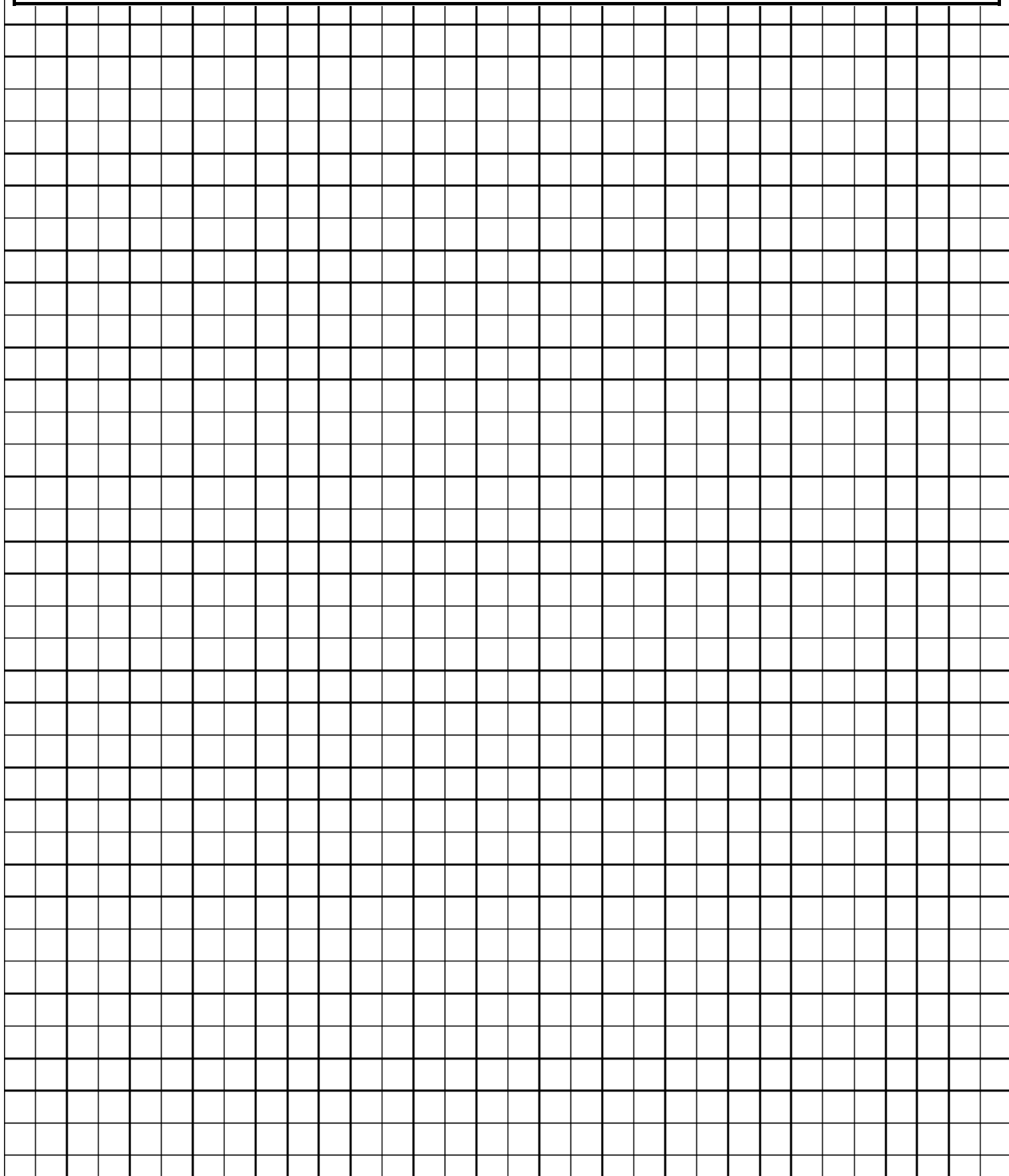
б) Найдите угол BAD , если угол CDA равен 50° , а высота, проведённая из точки M к AD , равна BC .

№ 22.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x-2a} \leq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x-2a+4}$$

имеет ровно два решения.



№ 23.

Дано натуральное трехзначное число n , в записи которого нет нулей. Для этого числа составим дробь $f(n)$, в числителе которой само число n , а в знаменателе — произведение всех цифр числа.

а) Приведите пример такого числа n , для которого $f(n) = \frac{119}{24}$.

б) Существует ли такое n , что $f(n) = \frac{125}{24}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $f(n)$, если она равна несократимой дроби со знаменателем 24?

№ 24.

У Вани есть несколько пакетов с вещами, каждый из которых весит целое число килограммов. Он хочет разложить все эти пакеты, не перекладывая их содержимое, по n имеющимся у него одинаковым рюкзакам. В каждый рюкзак можно положить любое число пакетов, суммарная масса которых не превосходит m килограммов.

а) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 3, 6, 9, 12, 15, 18 и 21 кг, если $n=3$ и $m=29$?

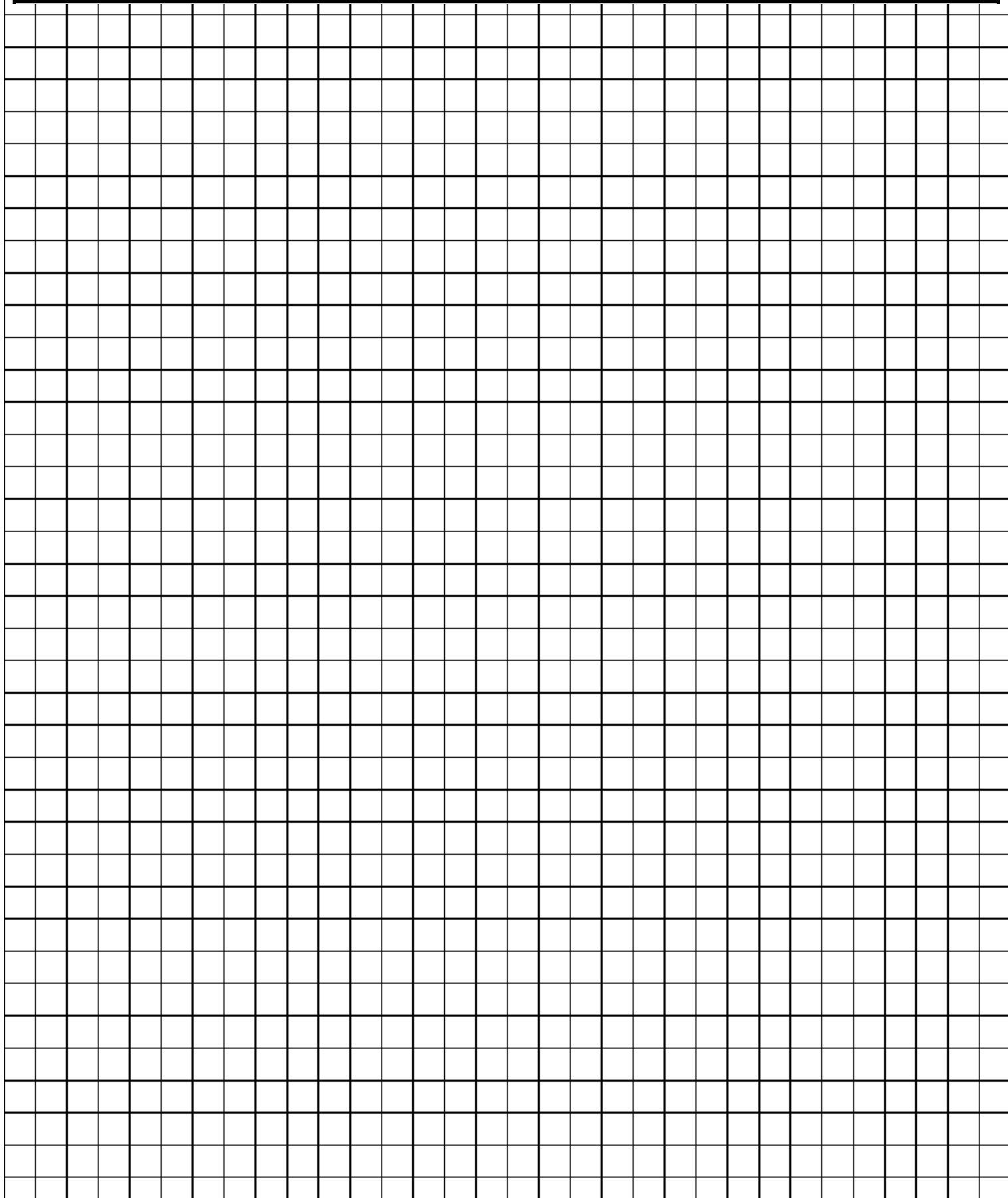
б) Сможет ли Ваня разложить таким образом семь пакетов, которые весят 2, 5, 8, 11, 14, 17 и 20 кг, если $n=3$ и $m=26$?

в) Какое наименьшее значение может принимать m , чтобы Ваня при $n=4$ смог разложить таким образом девять пакетов, которые весят 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 и 19 кг?

№ 25.

Даны числа A и B . Из них можно сделать числа $A+2$ и $B-1$ или $B+2$ и $A-1$, только если следующая пара этих чисел будет натуральной. Известно, что $A = 7$, $B = 11$.

- а) Можно ли за 20 ходов создать пару, где одно из чисел равно 50?
- б) За сколько ходов можно сделать пару, где сумма чисел будет равна 600?
- в) Какое наибольшее число ходов можно сделать, чтобы оба числа не превышали 50?



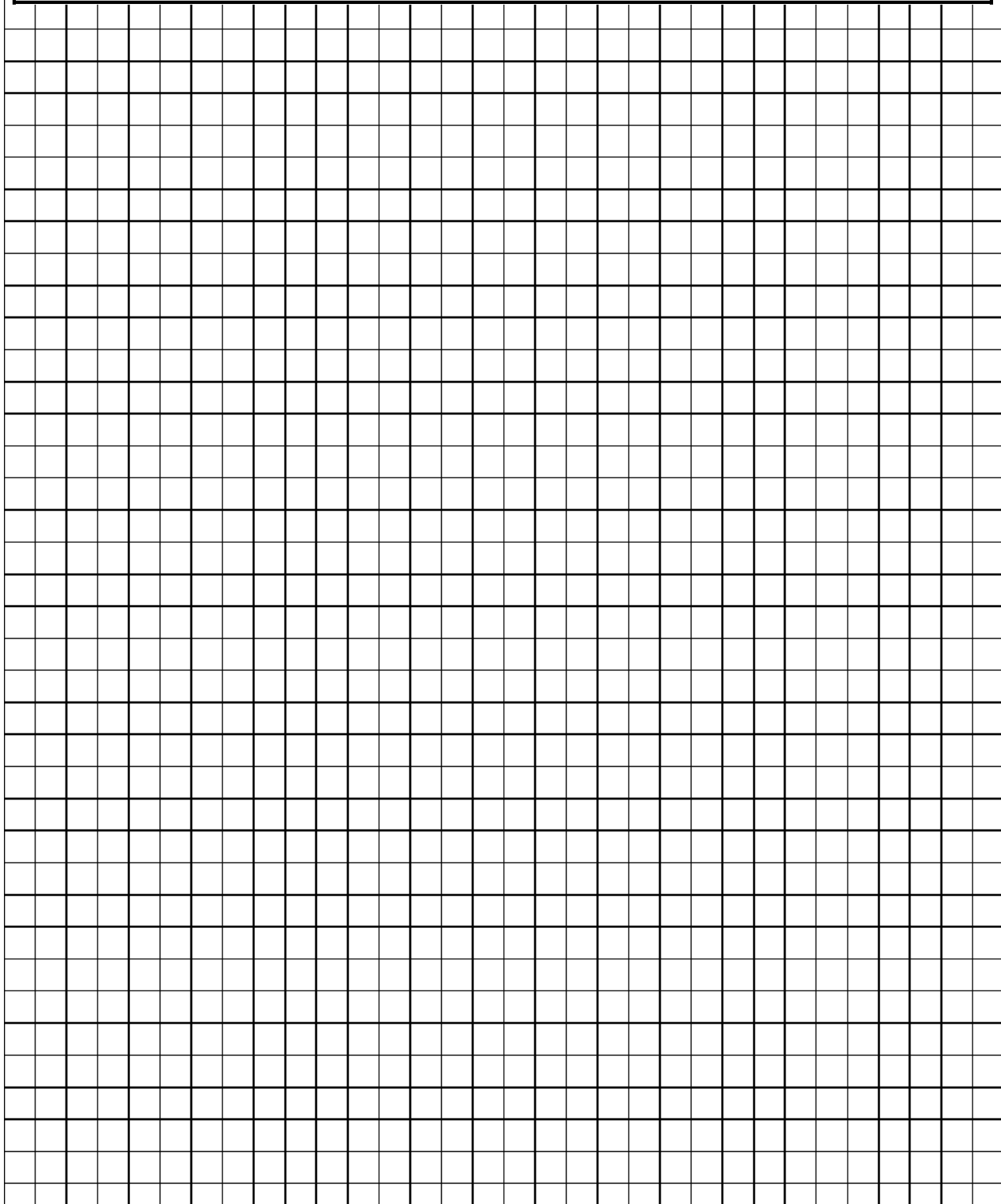
№ 26.

Дано трёхзначное число A , сумма цифр которого равна S .

а) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 28\,000$?

б) Может ли выполняться равенство $A \cdot S = 2971$?

в) Найдите наибольшее произведение $A \cdot S < 5997$.



№ 27.

За прохождение каждого уровня платной сетевой игры можно получить от одной до трех звезд. При этом со счета участника игры списывается 75рублей при получении одной звезды, 60рублей— при получении двух звезд и 45 рублей при получении трех звезд. Миша прошел несколько уровней игры подряд.

а) Могла ли сумма на его счете уменьшиться при этом на 330 рублей?

б) Сколько уровней игры прошел Миша, если сумма на его счете уменьшилась на 435 рублей, а число полученных им звезд равно 13?

в) За пройденный уровень начисляется 5000 очков при получении трех звезд, 3000 — при получении двух звезд и 2000 — при получении одной звезды. Какую наименьшую сумму (в рублях) мог потратить на игру Миша, если он набрал 50 000 очков, получив при этом 32 звезды?

№ 28.

Натуральные числа a , b , c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a , b , c и d , если $a + b + c + d = 15$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$.

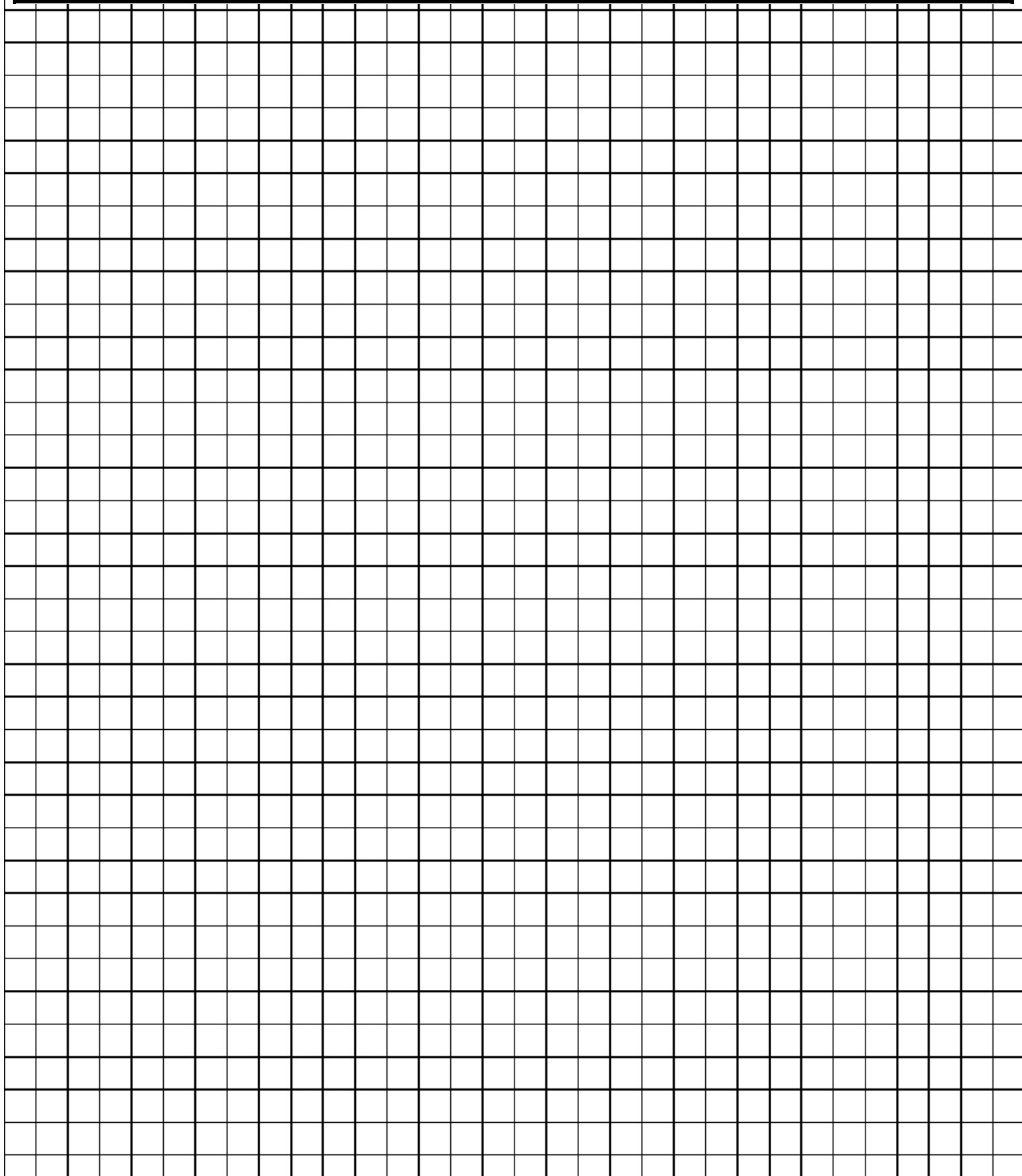
б) Может ли быть $a + b + c + d = 19$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 19$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1000$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1000$. Найдите количество возможных значений числа a .

№ 29.

В продуктовом магазине есть весы с двумя чашами. На одну чашу весов кладут только продукты, на другую— гири. На чашу для гирь можно положить несколько гирь. Магазину разрешено продавать только целое число килограммов продуктов.

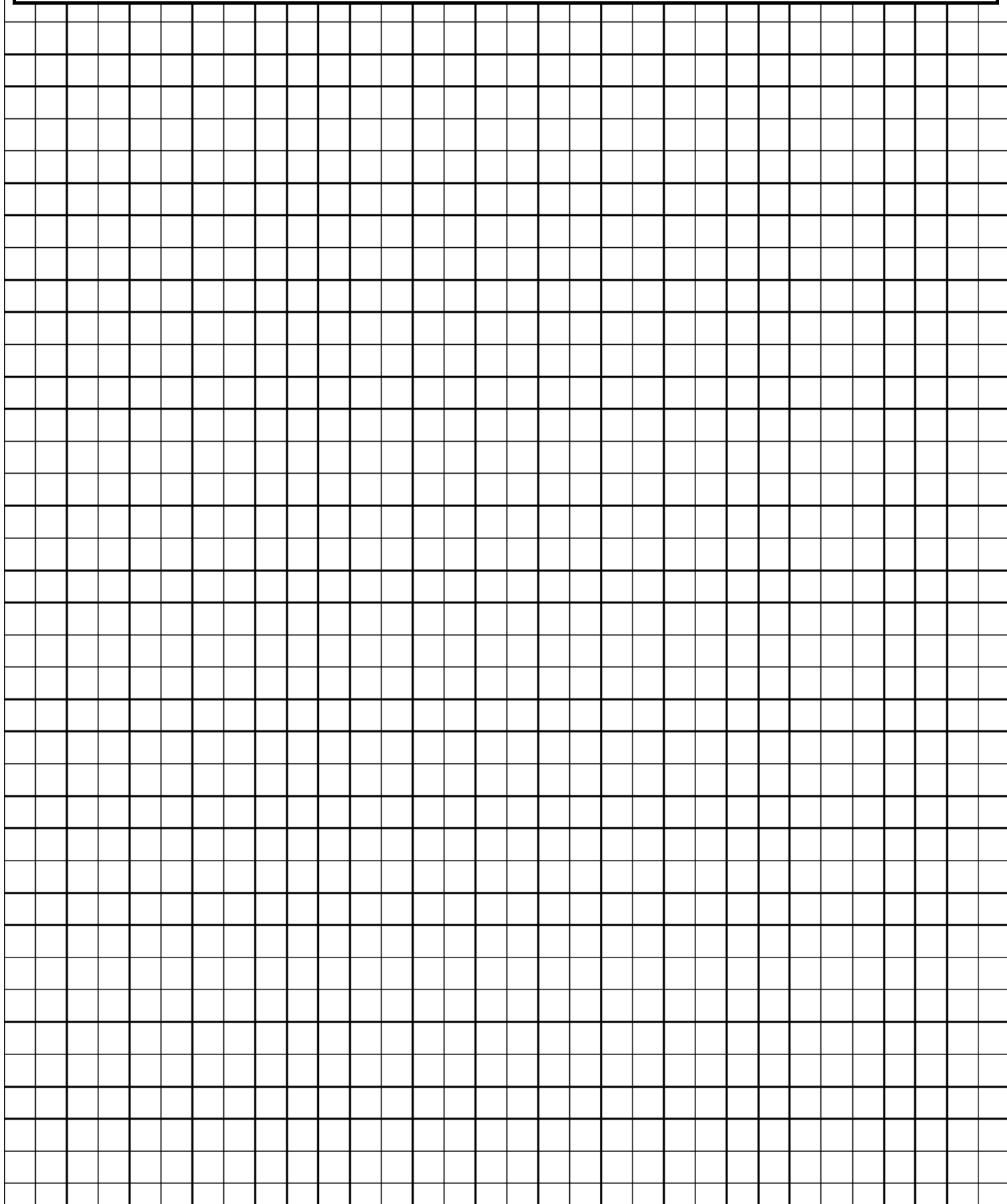
- а) Можно ли некоторым набором из пяти гирь отвесить любое целое число килограммов от 1 до 25?
- б) Можно ли некоторым набором из четырех гирь отвесить любое целое число килограммов от 1 до 25?
- в) Найдите наибольшее значение n такое, что любой вес от 1 до n килограммов можно отвесить каким-нибудь набором из 5 гирь.



№ 30.

Даны две последовательности: 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2 и 3, 6, 12. В каждой из них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону.

- а) Найдите этот закон.
- б) Найдите все натуральные числа, переходящие сами в себя (по этому закону).
- в) Докажите, что число 21991 после нескольких переходов станет однозначным.



№ 31.

На проекте «Мисс Чмаровка— 2016» выступление каждой участницы оценивают шесть судей. При этом каждый судья выставляет оценку— целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что за выступление Изольды Кабановой все члены жюри выставили различные оценки. По старой системе оценивания итоговый балл за выступление определяется как среднее арифметическое всех оценок судей. По новой системе оценивания итоговый балл вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и считается среднее арифметическое четырех оставшихся оценок.

- а) Могут ли итоговые баллы, вычисленные по старой и новой системам оценивания, оказаться одинаковыми?
- б) Может ли разность итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, оказаться равной $\frac{1}{8}$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение разности итоговых баллов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

№ 32.

За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

- а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
 б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?
 в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?