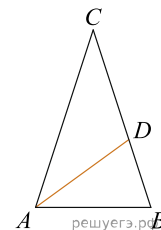


Вариант 109

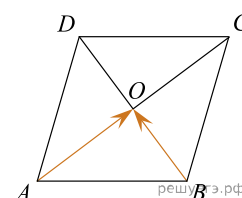
№ 1.

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD и $AB = AD = CD$. Найдите меньший угол треугольника ABC . Ответ дайте в градусах.



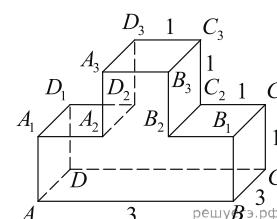
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} + \vec{BO}$.



№ 3.

На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите квадрат расстояния между вершинами B_2 и D_3 .



№ 4.

Вероятность того, что на тестировании по истории учащийся решит больше 10 задач, равна 0,75. Вероятность того, что учащийся верно решит больше 9 задач, равна 0,8. Найдите вероятность того, что Т. верно решит ровно 10 задач.

№ 5.

В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер появится третьим по счету?

№ 6.

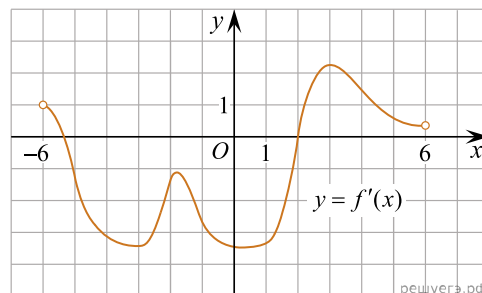
Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

№ 7.

Найдите значение выражения $(\log_2 16) \cdot (\log_6 36)$.

№ 8.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

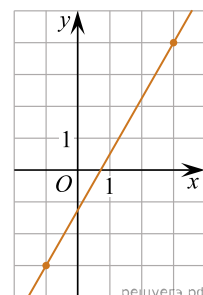
Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м и со скоростью течения $u = 0,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

№ 10.

Первый садовый насос перекачивает 5 литров воды за 2 минуты, второй насос перекачивает тот же объём воды за 3 минуты. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 25 литров воды?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -13,5$.



№ 12.

Найдите точку минимума функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x + \sqrt{3} \sin x - 1}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A , B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $CC_1 = 4\sqrt{6}$.

- Докажите, что угол между прямыми BC и AC_1 равен 60° .
- Найдите расстояние от точки B до AC_1 .

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{x^4 - 6x^2 + 5}{|x^2 + 3x|} \geq 0$.

№ 16.

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 3,3 млн руб. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равен 3,3 млн руб.;
- платежи в 2030 и 2031 годах должны быть равны;
- к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Найдите разницу между первым и последним платежами.

№ 17.

В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC ($AD > BC$) вписана окружность с центром O . Из вершины C опущена высота CH .

а) Докажите, что прямая AO является серединным перпендикуляром к отрезку BH .

б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если радиус вписанной в неё окружности равен 4, а длина отрезка, соединяющего точки касания вписанной окружности с боковыми сторонами, равна $\frac{64}{15}$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x - 4| + 3|y| = 2, \\ 9y^2 + x^2 - 8x + 4(a + 3) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

№ 19.

На доске разрешается написать n таких попарно различных натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, для которых при каждом натуральном числе $k = 2, \dots, n - 1$ выполнено равенство $a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2}$.

- Можно ли при $n = 4$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось равенство $a_4 = 2021$?
- Можно ли при $n = 100$ написать на доске такие числа, чтобы также выполнялось неравенство $|a_2 - a_1| < 2021$?
- При $n = 10$ на доске написаны такие числа. Какое наименьшее значение может принимать a_{10} ?