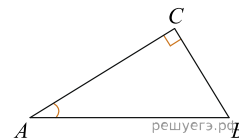


Вариант 115

№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 10$, $AC = \sqrt{91}$. Найдите $\sin A$.

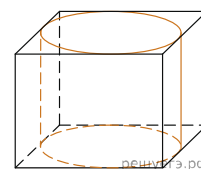


№ 2.

Найдите длину диагонали прямоугольника, вершины которого имеют координаты $(2; 1)$, $(2; 4)$, $(6; 1)$, $(6; 4)$.

№ 3.

Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.



№ 4.

В праздничном наборе 100 шариков: 10 красных, 20 синих, остальные желтые и зеленые, их поровну. Какова вероятность того, что из набора достали один шарик синего или желтого цвета?

№ 5.

Правильный игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не стала больше чем 3. Известно, что общая сумма очков оказалась равна 4. Какова вероятность того, что был сделан ровно один бросок? Ответ округлите до сотых.

№ 6.

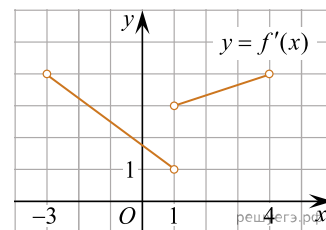
Решите уравнение $(x - 6)^2 = -24x$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{(4a)^{2,5}}{a^2\sqrt{a}}$ при $a > 0$.

№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(-3; 4)$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1) \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}},$$

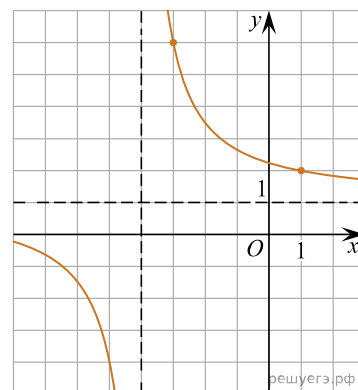
где $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями (от 0 до 1), $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина экспертами (от 0 до 0,7) и K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина «Бета», если число покупателей, оставивших отзыв о магазине, равно 20, их средняя оценка равна 0,65, а оценка экспертов равна 0,37.

№ 10.

Вере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$. Найдите a .



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ на отрезке $[-4; -1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\log_{\sqrt{2} \sin x} (1 + \cos x) = 2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

№ 14.

В основании пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$, сторона которого равна 8, а угол при вершине A равен 60° . Известно, что $SA = 15$, $SC = \sqrt{33}$ и, кроме того, $SB = SD$.

- а) Докажите, что SC — высота пирамиды.
 - б) Найдите угол между плоскостью ASC и ребром SB .
-

№ 15.

Решите неравенство $\log_{x+2}(x^2 - 2) \geq 2$.

№ 16.

Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа A и 2010 деталей типа B . Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа A время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа B . Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

№ 17.

В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагонали пересекаются в точке O , $AD = 2BC$. Через вершину A проведена прямая параллельная диагонали BD , а через вершину D проведена прямая параллельная диагонали AC , и эти прямые пересекаются в точке E .

- а) Докажите, что $BO : AE = 1 : 2$.
 - б) Прямые BE и CE пересекают сторону AD в точках M и N соответственно. Найдите MN , если $AD = 10$.
-

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq a^2 + 10a + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2ax + 4ay \leq 5 - a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 19.

Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их можно было бы провести в два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий.

- а) Может ли сумма числа аудиторий в обоих корпусах быть равна 24?
 - б) Найдите наименьшее возможное значение суммы числа аудиторий в обоих корпусах.
 - в) Найдите минимально возможное число абитуриентов, которое могло быть проэкзаменовано при этих условиях.
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	679651	0,3
2	513334	5
3	27042	0,25
4	672740	0,55
5	508792	0,63
6	77369	-6
7	26834	32
8	551780	3
9	317098	0,625
10	99585	22
11	509001	9
12	628240	-9

№ 13.

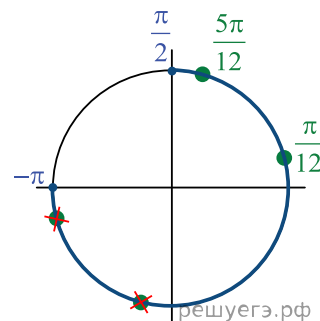
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение

$$\begin{aligned}
 \log_2 \sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) + \log_2 \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) &= -1 \Rightarrow \log_2 \left(\sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \right) = -1 \Leftrightarrow \log_2 \sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) + \log_2 \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = -1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \log_2 \left(\sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \right) = -1 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) \cdot \sin \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin 2x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Первый шаг в решении был переходом к следствию, поэтому могли появиться посторонние корни. Сделаем проверку: если $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi k$, то аргументы обоих логарифмов в исходном уравнении положительны. Следовательно, эти серии дают решения уравнения для всех целых k . Если $x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi k$ или $x = \frac{17\pi}{12} + 2\pi k$, то логарифмы не определены.

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$, при помощи единичной окружности (см. рис.). Получим числа $\frac{\pi}{12}$ и $\frac{5\pi}{12}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{12} + 2\pi k, \frac{5\pi}{12} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что так как угол ромба при вершине A равен 60° , ромб составлен из двух равносторонних треугольников ABD и BCD . Тогда диагональ AC равна удвоенной высоте этих треугольников, то есть $AC = 8\sqrt{3}$.

Заметим, что

$$AC^2 + SC^2 = (8\sqrt{3})^2 + (\sqrt{33})^2 = 225 = 15^2 = SA^2,$$

следовательно, треугольник SAC прямоугольный, а прямые SC и AC взаимно перпендикулярны.

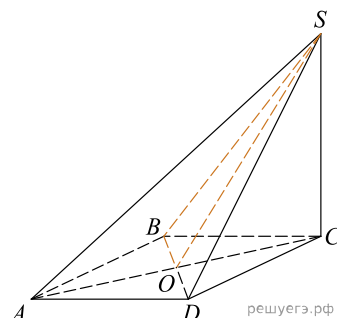
Пусть O — центр ромба, тогда прямая SO перпендикулярна прямой BD как высота равнобедренного треугольника SBD . Кроме того, прямые AC и BD взаимно перпендикулярны как диагонали ромба. Следовательно, прямая BD перпендикулярна грани SAC . Поэтому прямые SC и BD взаимно перпендикулярны, а значит, прямая SC перпендикулярна основанию $ABCD$.

б) В п. а) доказано, что прямая BD перпендикулярна грани SAC , следовательно, проекцией прямой SB на плоскость SAC является прямая SO и искомый угол равен углу BSO . Заметим, что:

$$BO = \frac{1}{2}BD = 4,$$

$$CO = \frac{1}{2}AC = 4\sqrt{3},$$

$$SO = \sqrt{CO^2 + SC^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (\sqrt{33})^2} = 9,$$



$$\operatorname{tg} \angle BSO = \frac{BO}{SO} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \angle BSO = \operatorname{arctg} \frac{4}{9}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{4}{9}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Перепишем правую часть неравенства:

$$\log_{x+2}(x^2 - 2) \geq \log_{x+2}(x+2)^2.$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} (x+2-1)(x^2-2-(x+2)^2) \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x^2-2 > 0. \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x+1,5) \leq 0, \\ x > -2, \\ x \neq -1, \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty). \end{array} \right. \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -\sqrt{2}. \left\{ \begin{array}{l} (x+2-1)(x^2-2-(x+2)^2) \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x^2-2 > 0. \end{array} \right. & \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x+1,5) \leq 0, \\ x > -2, \\ x \neq -1, \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty). \end{array} \right. & \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -\sqrt{2}. \left\{ \begin{array}{l} (x+2-1)(x^2-2-(x+2)^2) \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1, \\ x^2-2 > 0. \end{array} \right. & \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x+1)(x+1,5) \leq 0, \\ x > -2, \\ x \neq -1, \\ x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty). \end{array} \right. & \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}; -\sqrt{2}\right)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Заменим мысленно каждую деталь типа *B* двумя деталями типа *A*, время работы от этого не изменится. Получим, что первая бригада рабочих должна изготовить 1005 деталей типа типа *A*, а вторая бригада должна изгото-

вить 4020 деталей типа А, то есть в 4 раза больше. Значит, количество рабочих в бригадах необходимо разделить в соотношении 1:4. Поэтому в первой бригаде должно быть $193:5=38,6$ чел., а во второй— в 4раза больше, то есть 154,4 чел.

Дробное число рабочих изготавливать детали не может, поэтому найденные значения необходимо округлить. Если в первой бригаде будет 38 рабочих, а во второй— 154 рабочих (в 4,05 раза больше), то первая бригада закончит работу позже второй. Если же в первой бригаде будет 39 рабочих, а во второй 153 рабочих (в 3,92 раза больше), то вторая бригада закончит позже первой. Для каждого из этих случаев оценим время выполнения заказа. Другие варианты разбиения рабочих по бригадам (37на 155чел., 40на 152чел. ит.д.) не могут дать меньшего времени, по сравнению с первыми двумя, поскольку чем дальше отношение числа рабочих в бригадах от соотношения 1:4, тем дольше будет работать более медленная из бригад, в то время как уже закончившая свою часть заказа бригада будет простаивать.

Пусть одна деталь делается рабочим за 1единицу времени; не ограничивая общности, положим эту единицу равной 1минуте. Тогда бригада из 38 человек на изготовление 1005 деталей затратит $\frac{1005}{38} = 26,45... \text{ мин.}$, а бригада из 154 человек затратит на изготовление 2010 деталей $2 \cdot \frac{2010}{154} = 26,1... \text{ мин.}$ В этом случае заказ будет закончен больше чем за 26,4мин. Если же в первой бригаде 39чел., то на изготовление 1005 деталей они затратят $\frac{1005}{39} = 25,8... \text{ мин.}$, в то время как вторая бригада из 153 человек затратит на изготовление 2010 деталей $2 \cdot \frac{2010}{153} = 26,27... \text{ мин.}$ В этом случае заказ будет закончен меньше чем за 26,3мин. Значит, в первой бригаде должно быть 39рабочих, а во второй бригаде — 153 рабочих.

Ответ: 39 и 153.

Примечание.

Эта задача из варианта Александра Ларина впервые предлагалась абитуриентам экономического факультета МГУ в 1992 году под номером3 из шести задач в варианте. Авторское решение аналогичной задачи мы привели в задаче [632165](#).

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Треугольник BOC подобен треугольнику DOA по двум углам, поэтому

$$\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2}.$$

Отрезки AO и ED , DO и AE соответственно параллельны, следовательно, $AODE$ — параллелограмм, значит, $AE = DO$ и $BO : AE = 1 : 2$, что и требовалось доказать.

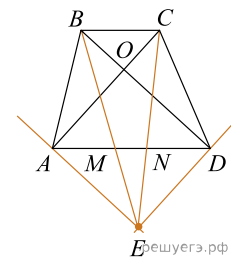
б) Треугольник AME подобен треугольнику DMB по двум углам, отсюда следует, что

$$\frac{AM}{MD} = \frac{AE}{BD} = \frac{AE}{1,5AE} = \frac{2}{3} \Rightarrow AM = \frac{2}{5}AD.$$

Аналогично

$$CO = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}DE \Rightarrow AC = 1,5DE \Rightarrow DN = \frac{2}{5}AD \Rightarrow MN = \frac{1}{5}AD = 2.$$

Ответ: б) 2.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. В обоих неравенствах выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq a^2 + 10a + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2ax + 4ay \leq 5 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \leq a^2 + 10a + 25, \\ x^2 - 2x \cdot \frac{a}{5} + \frac{a^2}{25} + y^2 + 2x \cdot \frac{2a}{5} + \frac{4a^2}{25} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq (a+5)^2, \\ \left(x - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{2a}{5}\right)^2 \leq 1. \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 4y \leq a^2 + 10a + 20, \\ 5x^2 + 5y^2 - 2ax + 4ay \leq 5 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 \leq a^2 + 10a + 25, \\ x^2 - 2x \cdot \frac{a}{5} + \frac{a^2}{25} + y^2 + 2x \cdot \frac{2a}{5} + \frac{4a^2}{25} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq (a+5)^2, \\ \left(x - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{2a}{5}\right)^2 \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

В системе координат xOy неравенства задают круги, один из которых при $a = -5$ вырождается в точку. Чтобы система имела хотя бы одно решение расстояние между центрами кругов должно быть не больше суммы их радиусов:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot \left|1 - \frac{a}{5}\right| \leq |a+5| + 1. \sqrt{\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sqrt{5\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot \left|1 - \frac{a}{5}\right| \leq |a+5| + 1. \sqrt{\left(1 - \frac{a}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{2a}{5}\right)^2} \leq |a+5| + 1 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5\left(1-\frac{a}{5}\right)^2} \leq |a+5|+1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{5} \cdot \left|1-\frac{a}{5}\right| \leq |a+5|+1.$$

Рассмотрим три случая раскрытия модулей. При $a \geq 5$ имеем:

$$\sqrt{5} \cdot \left(-1+\frac{a}{5}\right) \leq a+5+1 \Leftrightarrow -\sqrt{5}+\frac{a}{\sqrt{5}} \leq a+6 \Leftrightarrow a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}-1\right) \leq 6+\sqrt{5} \Leftrightarrow a \geq \frac{6+\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}-1}. \sqrt{5} \cdot \left(-1+\frac{a}{5}\right) \leq a+5+1 \Leftrightarrow -\sqrt{5}+\frac{a}{\sqrt{5}} \leq a+6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}-1\right) \leq 6+\sqrt{5} \Leftrightarrow a \geq \frac{6+\sqrt{5}}{\frac{1}{\sqrt{5}}-1}.$$

При $a \geq 5$ это неравенство верно.

При $-5 \leq a < 5$ имеем:

$$\sqrt{5} \cdot \left(1-\frac{a}{5}\right) \leq a+5+1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-\frac{a}{\sqrt{5}} \leq a+6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}-1\right) \leq 6-\sqrt{5} \Leftrightarrow a \geq \frac{\sqrt{5}-6}{\frac{1}{\sqrt{5}}+1} \Leftrightarrow a \geq \frac{11\sqrt{5}-35}{4}. \sqrt{5} \cdot \left(1-\frac{a}{5}\right) \leq a+5+1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-\frac{a}{\sqrt{5}} \leq a+6 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}-1\right) \leq 6-\sqrt{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \geq \frac{\sqrt{5}-6}{\frac{1}{\sqrt{5}}+1} \Leftrightarrow a \geq \frac{11\sqrt{5}-35}{4}.$$

С учётом условия $-5 \leq a < 5$ получаем: $\frac{11\sqrt{5}-35}{4} \leq a < 5$.

При $a < -5$ имеем:

$$\sqrt{5} \cdot \left(1-\frac{a}{5}\right) \leq -a-5+1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-\frac{a}{\sqrt{5}} \leq -a-4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \leq -4-\sqrt{5} \Leftrightarrow a \leq -\frac{4+\sqrt{5}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow a \leq -\frac{9\sqrt{5}+25}{4}. \sqrt{5} \cdot \left(1-\frac{a}{5}\right) \leq -a-5+1 \Leftrightarrow \sqrt{5}-\frac{a}{\sqrt{5}} \leq -a-4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \cdot \left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \leq -4-\sqrt{5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \leq -\frac{4+\sqrt{5}}{1-\frac{1}{\sqrt{5}}} \Leftrightarrow a \leq -\frac{9\sqrt{5}+25}{4}.$$

Все найденные a удовлетворяют условию $a < -5$.

Объединяя результаты получаем, что исходная система имеет хотя бы одно решение при $a \leq -\frac{9\sqrt{5}+25}{4}$ или $a \geq \frac{11\sqrt{5}-35}{4}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{9\sqrt{5}+25}{4}\right] \cup \left[\frac{11\sqrt{5}-35}{4}; +\infty\right)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть в первом корпусе — x аудиторий, а во втором — y . Тогда число абитуриентов, с одной стороны, равно $3x^2$, а с другой, $2y^3$, откуда $3x^2 = 2y^3$. Значит, y кратно 3, x кратно 2, тогда $3x^2$ кратно 4, поэтому y^3 кратно 2 и y кратно 2. Тогда $2y^3$ кратно 16 и x кратно 4. Кроме того, поскольку y кратно 3, то y^3 кратно 27, x^2 кратно 9 и x кратно 3.

Таким образом, y кратно 6 и x кратно 12. Пусть $y = 6b$, $x = 12a$. Тогда $3 \cdot 12^2 a^2 = 2 \cdot 6^3 b^3$, $a^2 = b^3$. Тогда все простые множители входят в b^3 (а тогда и в b) в четной степени и потому оно является квадратом. Пусть $b = t^2$, тогда $a^2 = t^6$ и $a = t^3$. Таким образом, $y = 6t^2$, $x = 12t^3$ при некотором натуральном t .

а) Уравнение $6t^2 + 12t^3 = 24$ не имеет натуральных корней, поскольку при $t = 1$ левая часть меньше правой, а при $t \geq 2$ левая часть больше правой.

б) Наименьшее значение выражения $6t^2 + 12t^3$ достигается при $t = 1$ и равно 18.

в) Наименьшее значение выражения $3x^2 = 3 \cdot 12^2 a^2 = 3 \cdot 12^2 t^6$ равно $3 \cdot 12^2 = 432$ и достигается при $t = 1$.

Ответ: а) нет; б) 18; в) 432.
