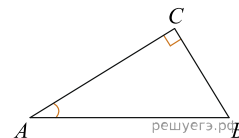


Вариант 116

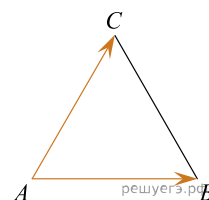
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .



№ 2.

Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.



№ 3.

Три ребра прямоугольного параллелепипеда, исходящие из одной вершины, равны 5, 6, 8. Найдите объем параллелепипеда, ребра которого равны половинам ребер данного параллелепипеда.

№ 4.

На рок-фестивале выступают группы— по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

№ 5.

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем $36,8^\circ\text{C}$, равна 0,81. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется $36,8^\circ\text{C}$ или выше.

№ 6.

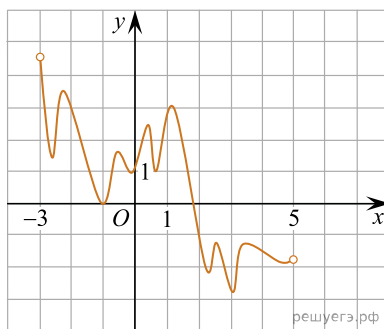
null

№ 7.

Найдите $2p(x-7) - p(2x)$, если $p(x) = x - 3$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.

**№ 9.**

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 5000 \text{ км/ч}^2$. Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 100 км/ч .

№ 10.

Расстояние между городами A и B равно 150 км . Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A , автомобиль прибыл в B . Найдите расстояние от A до C . Ответ дайте в километрах.

№ 11.

null

№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10; -1]$.

№ 13.

- Решите уравнение $2^{4 \sin^2 x + 1} + 2^{4 \cos^2 x} = 18$.
- Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№ 14.

- Точка S лежит вне плоскости прямоугольника $ABCD$. Известно, что $AB = 8$, $BC = 12$, $SA = 6$, $SB = 10$, $SD = 6\sqrt{5}$.
- Докажите, что прямая SA перпендикулярна плоскости ABC .
 - Найдите расстояние от точки A до плоскости SCB .

№ 15.

Решите неравенство $\left(x + \frac{3}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2 \geq 4 \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2$.

№ 16.

5 января 2020 года Андрей планирует открыть вклад на сумму 3 миллиона рублей. Первые три года 2 января банк будет начислять 10% на сумму вклада, а в последующие годы банк будет начислять 5% на сумму вклада.

4 января каждого года Андрей будет делать дополнительный взнос на вклад так, чтобы после этого величина вклада на 5 января была больше величины вклада на 5 января прошлого года на одно и то же число. Определите общий размер начислений банка, если 3 января 2031 года на вкладе будет лежать 24,15 миллиона рублей.

№ 17.

null

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 - (a-1)\sqrt{a+3}y + a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0, \\ y = \sqrt{a+3} \cdot x^2 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

№ 19.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27240	8
2	27722	4,5
3	661073	30
4	320186	0,33
5	320197	0,19

№ 6.

null

null

№ 11.

null

null

1277470-10

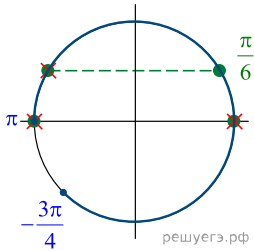
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, а знаменатель существует. Поэтому при условии $0 \leq \cos x < 1$ имеем:

$$4^2 \sin^2 x = 4^{\sin x} \Leftrightarrow 2 \sin^2 x = \sin x \Leftrightarrow \sin x (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



С учетом ограничения $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

б) Отберём корни на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ с помощью тригонометрической окружности (см. рис.), получим $\frac{\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

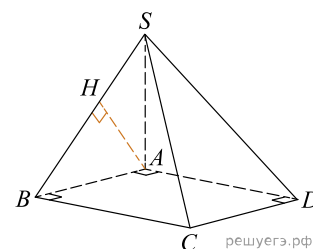
Решение. а) Треугольник ABS является прямоугольным по теореме, обратной к теореме Пифагора, поскольку

$$SA^2 + AB^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = SB^2.$$

Поэтому прямые SA и AB перпендикулярны. Аналогично треугольник SDA является прямоугольным, поскольку

$$SA^2 + AD^2 = 6^2 + 12^2 = (6\sqrt{5})^2 = SD^2.$$

Поэтому прямые SA и SD перпендикулярны. Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая SA перпендикулярна плоскости ABC .



б) В треугольнике ABS опустим высоту AH и докажем, что прямая AH перпендикулярна плоскости SCB . Прямые BC и AB перпендикулярны, так как $ABCD$ — прямоугольник. Прямые BC и SA перпендикулярны, так как прямая SA перпендикулярна плоскости ABC . Следовательно, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая BC перпендикулярна плоскости SAB . А значит, прямая BC перпендикулярна и прямой AH , лежащей в плоскости ABS .

Таким образом, прямая AH перпендикулярна пересекающимся прямым SB и CB , значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая AH перпендикулярна плоскости SCB , следовательно, расстояние от точки A до плоскости SCB равно высоте AH треугольника ABS . Из прямоугольного треугольника ABS находим, что

$$AH = \frac{AS \cdot AB}{SB} = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8.$$

Ответ: б) 4,8.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Решение неравенства ищем при условиях:
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5 - x \geq 0, \\ 5 - x \neq 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$, т. е. $|x - 3| = 1$ и, значит, $x = 2$ или $x = 4$. Таким образом, $x = 2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2$, получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$.



Решим это неравенство, получим: $0 < x \leq 1$ или $x \geq 3$.
Учитывая ограничения, получаем множество решений исходного неравенства: $(0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4) \cup (4; 5]$.

Ответ: $(0; 1] \cup \{2\} \cup [3; 4) \cup (4; 5]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. 2 января 2031 года банк увеличит сумму вклада на 5%, после чего на вкладе окажется 24,15 миллиона рублей. Тогда 5 января 2030 года сумма вклада составляла $\frac{24,15}{1,05} = 23$ млн руб. По условию, величина вклада на 5 января была больше величины вклада на 5 января прошлого года на одно и то же число и за 10 лет выросла на 20 млн руб., значит, каждый год величина вклада увеличивалась на 2 млн руб. Заполним таблицу.

Год	Величина вклада 2 января, после начисления процентов, млн руб.	Величина вклада 5 января, млн руб.
2020		3
2021	$3 + 3 \cdot 0,10$	5
2022	$5 + 5 \cdot 0,10$	7
2023	$7 + 7 \cdot 0,10$	9
2024	$9 + 9 \cdot 0,05$	11
2025	$11 + 11 \cdot 0,05$	13
...	...	...
2030	$21 + 21 \cdot 0,05$	23
2031	$23 + 23 \cdot 0,05 = 24,15$	

Суммируя величины ежегодных начислений, указанные в первом столбце таблицы, находим общий размер начислений банка:

$$\begin{aligned} &3 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,10 + 7 \cdot 0,10 + 9 \cdot 0,05 + 11 \cdot 0,05 + 13 \cdot 0,05 + \dots + 21 \cdot 0,05 + 23 \cdot 0,05 = 3 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,10 + 7 \cdot 0,10 + 9 \cdot 0,05 + 11 \cdot 0,05 + \\ &\quad + 13 \cdot 0,05 + \dots + 21 \cdot 0,05 + 23 \cdot 0,05 = 3 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,10 + 7 \cdot 0,10 + \\ &\quad + 9 \cdot 0,05 + 11 \cdot 0,05 + 13 \cdot 0,05 + \\ &\quad + \dots + 21 \cdot 0,05 + 23 \cdot 0,05 = \\ &= 1,5 + \frac{9+23}{2} \cdot 8 \cdot 0,05 = 1,5 + 6,4 = 7,9 \text{ млн руб.} \end{aligned}$$

Ответ: 7,9 млн руб.

№ 17.

null

null

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что парс чисел $(x; y)$ и $(-x; y)$ являются решениями системы одновременно. Следовательно, решения, в которых $x \neq 0$, разбиваются на пары, а потому их четное количество. Значит, система уравнений имеет ровно три различных решения, если одно из них имеет вид $(0; y)$. Тогда из второго уравнения $y = 0$, а первое примет вид

$$\begin{aligned}
 & a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0 \Leftrightarrow a^4 - a^2 + 2(a^3 - a) - 8a^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2(a^2 - 1) + 2a(a^2 - 1) - 8(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (a^2 + 2a - 8)(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (a - 2)(a + 4)(a - 1)(a + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ a = -4, \\ a = 1, \\ a = -1. \end{cases} \quad a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0 \Leftrightarrow a^4 - a^2 + 2(a^3 - a) - 8a^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2(a^2 - 1) + 2a(a^2 - 1) - 8(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (a^2 + 2a - 8)(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ a = -4, \\ a = 1, \\ a = -1. \end{cases} \quad a^4 + 2a^3 - 9a^2 - 2a + 8 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^4 - a^2 + 2(a^3 - a) - 8a^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2(a^2 - 1) + 2a(a^2 - 1) - 8(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (a^2 + 2a - 8)(a^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2, \\ a = -4, \\ a = 1, \\ a = -1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

При $a = 2$ уравнения примут вид $x^4 - \sqrt{5}y = 0$ и $y = \sqrt{5}x^2$, откуда $x^4 - 5x^2 = 0$. Это уравнение имеет три корня: $x = 0$, $x = \sqrt{5}$ и $x = -\sqrt{5}$ и каждому из них соответствует единственное значение y . Итак, $a = 2$ подходит.

При $a = 1$ уравнения примут вид $x^4 = 0$ и $y = 2x^2$, откуда $x = y = 0$. Значит, в этом случае система имеет единственное решение, то есть $a = 1$ не подходит.

При $a = -1$ уравнения примут вид $x^4 + 2\sqrt{2}y = 0$ и $y = \sqrt{2}x^2$. Отсюда $x^4 + 4x^2 = 0$, то есть $x = y = 0$. Итак, в этом случае система имеет единственное решение, то есть $a = -1$ не подходит.

При $a = -4$ уравнения не определены.

Ответ: $a = 2$.

№ 19.
