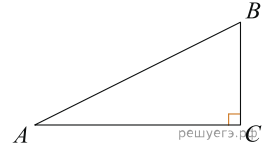


Вариант 117

№ 1.

Один острый угол прямоугольного треугольника на 32° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.

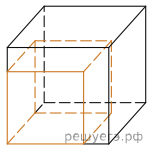


№ 2.

null

№ 3.

Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 19. Найдите ребро куба.



№ 4.

На тарелке 16 пирожков: 7 с рыбой, 5 с вареньем и 4 с вишней. Юля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

№ 5.

Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,6?

№ 6.

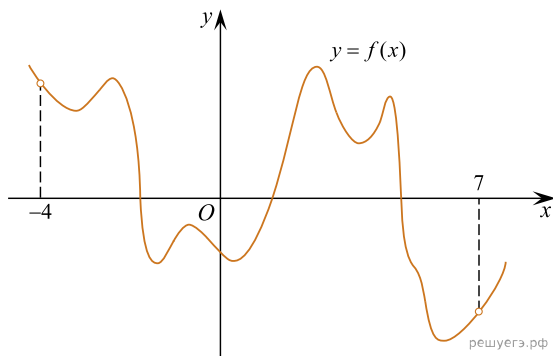
null

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{(5a^2)^3 \cdot (6b)^2}{(30a^3b)^2}$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих интервалу $(-4; 7)$.



№ 9.

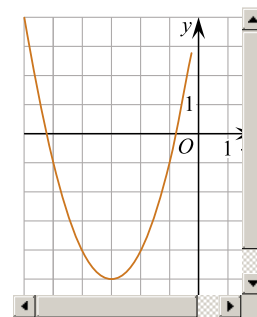
Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0 \omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 360 c^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω , меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в c^{-1} .

№ 10.

Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть — со скоростью 120 км/ч, а последнюю — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $f(1)$.



№ 12.

null

№ 13.

- Решите уравнение $\cos 2x - \sin 2x = \cos x + \sin x + 1$.
- Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№ 14.

- Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 2.
- а) Докажите, что плоскости $A_1 B D$ и $B_1 D_1 C$ параллельны.
 - б) Найдите расстояние между плоскостями $A_1 B D$ и $B_1 D_1 C$.

№ 15.

Решите неравенство: $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq x^2 + x + 1$.

№ 16.

Планируется открыть вклад на 4 года, положив на счет целое число миллионов рублей. В конце каждого года сумма, лежащая на вкладе, увеличивается на 10%, а в начале третьего и четвертого года вклад пополняется на 3 миллиона рублей. Найдите наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 5 миллионов рублей.

№ 17.

- Вершины A, B и C параллелограмма $ABCD$ лежат на окружности, вершина D не лежит на этой окружности. Ее хорды BK и BM перпендикулярны прямым AD и CD соответственно.
- а) Докажите, что четырехугольник $ACMK$ является прямоугольником.
 - б) Найдите площадь четырехугольника $ACMK$, если радиус окружности равен 2, а

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 4x + a| \leq 10$ выполняется для всех $x \in [a, a + 5]$.

№ 19.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27742	61

№ 2. null

null

[3271022](#) [41024](#) [0,25](#) [5508830](#) [5](#)

№ 6. null

null

[7267975](#) [85233945](#) [927974](#) [120](#) [1099605](#) [88](#) [11508943](#) [11](#)

№ 13.

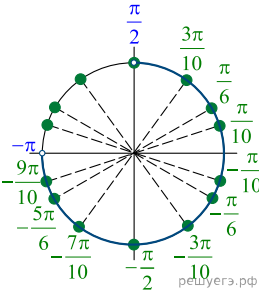
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 3x - \sin \left(7x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos 5x \Leftrightarrow \cos 3x + \cos 7x = \cos 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos 5x \cos 2x - \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x (2 \cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б)Отберём корни при помощи тригонометрической окружности (см.рис.). На заданном промежутке лежат корни: $-\frac{9\pi}{10}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{9\pi}{10}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{7\pi}{10}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{10}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Рассмотрим плоскость, проходящую через вершины A_1 , B и D куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Ортогональная проекция AC диагонали AC_1 куба на плоскость основания $ABCD$ перпендикулярна прямой BD , поэтому AC_1 и BD перпендикулярны по теореме о трех перпендикулярах. Аналогично AC_1 перпендикулярна DA_1 . Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости диагональ AC_1 перпендикулярна плоскости треугольника $DA_1 B$. Аналогично докажем, что плоскость треугольника $D_1 B_1 C$ перпендикулярна диагонали AC_1 . Плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой. Это и требовалось доказать.

б) Рассмотрим сечение $AA_1 C_1 C$, пусть E и F — основания высот AE и $C_1 F$ прямоугольных треугольников $A_1 A O$ и $CC_1 O_1$ соответственно. Тогда искомое расстояние между плоскостями равно длине отрезка EF . Катетами указанных треугольников являются ребро куба и половина диагонали грани куба. Тем самым, эти треугольники равны, а тогда равны и их высоты, проведенные к гипотенузам. Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна произведению катетов, деленному на гипотенузу, поэтому

$$C_1 F = AE = \frac{AA_1 \cdot AO}{A_1 O} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4+2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

а тогда

$$EF = AC_1 - AE - C_1 F = 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Приведем решение Ирины Шарго.

а) Прямая BD параллельна прямой $B_1 D_1$, прямая BA_1 параллельна прямой CD_1 , следовательно, плоскости $A_1 B D$ и $B_1 D_1 C$ параллельны.

б) Расстояние между плоскостями $A_1 B D$ и $B_1 D_1 C$ равно расстоянию от точки C до плоскости $A_1 B D$. Пусть это расстояние равно h , найдем его как высоту тетраэдра $CA_1 B D$, выразив объем двумя способами: взяв за основание треугольник $A_1 B D$, откуда $V_{CA_1 B D} = \frac{1}{3} h \cdot S_{A_1 B D}$, и взяв за основание треугольник $C B D$: $V_{CA_1 B D} = \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot S_{C B D}$.

Найдем площадь треугольника $A_1 B D$:

$$S_{A_1 B D} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot A_1 O = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}.$$

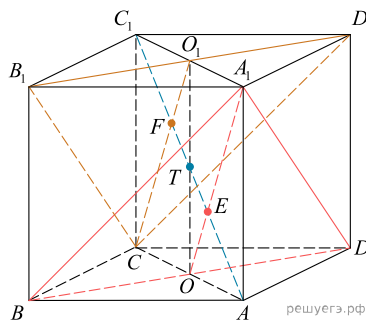
Тогда

$$h = \frac{AA_1 \cdot S_{C B D}}{S_{A_1 B D}} = \frac{2 \cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Примечание.

Внимательный читатель узнал, конечно, известную теорему: в любом параллелепипеде (не обязательно прямоугольном) $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскости сечений $DA_1 B$ и $D_1 B_1 C$ параллельны и делят диагональ параллелепипеда AC_1 на три равные части. Докажем эту теорему.

Плоскости BDA_1 , $CD_1 B_1$ параллельны, поскольку прямая CD_1 параллельна прямой BA_1 и прямая $B_1 D_1$ параллельна прямой BD . Возьмем теперь плоскости BDA_1 , $CD_1 B_1$ и параллельные им плоскости, проходящие через вершины A и C_1 . Отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 равны, параллельны и лежат своими концами на этих плоскостях, поэтому расстояния между соседними плоскостями равны (и равны длине AA_1 , умноженной на синус угла между AA_1 с этими плоскостями). А тогда любой отрезок с концами на крайних плоскостях остальные две плоскости разбивают на три равные части. В частности, это относится к диагонали AC_1 .



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Для положительных a выражения $a^b - a^c$ и $(a-1)(b-c)$ имеют один знак, а потому

$$\begin{aligned} (x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2+x+1)^1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+1 > 0, \\ (x^2+x+1-1) \cdot \left(\frac{x+5}{x+2}-1\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2+x) \cdot \frac{3}{x+2} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -1, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; -1] \cup [0; +\infty)$.

Приведем другое решение.

Заметим, что при любом значении x

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0. (*)$$

Значит, обе части неравенства положительны. Логарифмируем обе части неравенства по основанию 10:

$$\begin{aligned} (x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq x^2+x+1 &\Leftrightarrow \lg(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq \lg(x^2+x+1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x+5}{x+2} \cdot \lg(x^2+x+1) - \lg(x^2+x+1) &\geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lg(x^2+x+1) \cdot \left(\frac{x+5}{x+2} - 1\right) &\geq 0 \Leftrightarrow (\lg(x^2+x+1) - \lg 1) \cdot \frac{3}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow (*) \\ \Leftrightarrow (x^2+x+1-1) \cdot \frac{1}{x+2} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \leq -1, \\ x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; -1] \cup [0; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть в банк был положено x миллионов рублей. После двух лет сумма вклада составит:

$$1,1 \cdot 1,1x = 1,21x.$$

В начале третьего года вклад пополняется на 3 миллиона. Затем банк начисляет проценты и сумма вклада станет равна:

$$1,1(1,21x+3) = 1,331x+3,3.$$

В начале четвертого года вклад пополняется еще раз на 3 миллиона. После начисления процентов за четвертый год сумма вклада станет равна:

$$1,1(1,331x+6,3) = 1,4641x+6,93.$$

Это превосходит внесенную вкладчиком сумму $x+3+3$ млн руб. на $0,4641x+0,93$ млн руб.

По условию задачи

$$0,4641x+0,93 > 5,$$

откуда

$$x > \frac{4,07}{0,4641} = \frac{40700}{4641} = 8,7\dots$$

Наименьшее целое решение неравенства равно 9. Таким образом, наименьший первоначальный вклад, при котором начисленные проценты за весь срок будут более 5 миллионов рублей, составляет 9 миллионов рублей.

Ответ: 9 млн руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть хорда BK пересекает диагональ AC в точке P , а сторону AD — в точке H . Вписанные углы BCA и BKA опираются на одну дугу, а потому равны. Углы BCA и CAD равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AC . Пусть $\angle BCA = \alpha$ тогда $\angle CAD = \alpha$ откуда

Вписанные углы BAC и BMC опираются на одну дугу, а потому равны. Углы BAC и ACD равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AC . Пусть $\angle BAC = \beta$ тогда $\angle ACD = \beta$ откуда

Следовательно, во вписанном четырехугольнике $ACMK$ $\angle CPM = \beta$ а потому

то есть в этом четырехугольнике все углы прямые. Такой четырехугольник является прямоугольником.

б) В прямоугольнике противоположные стороны попарно равны: $AC = KM$ $AK = CM$. По теореме синусов для треугольника ABK получаем:

Аналогично из треугольника ABC находим:

Вычислим площадь прямоугольника $ACMK$:

Ответ: б) 4.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2

Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 - 4x + a = (x - 2)^2 + a - 4.$$

Эта функция возрастает на промежутке $[2, +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty, 2]$. Исходное неравенство имеет вид $|f(x)| \leq 10$, значит, график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ должен находиться в пределах горизонтальной полосы: $-10 \leq f(x) \leq 10$.

Отрезок $[a, a+5]$ не должен лежать на участке монотонности функции $f(x)$, иначе приращение $f(x)$ на отрезке длины 5 будет не меньше 25, поэтому ее график не поместится в полосу ширины 20, следовательно, $a < 2 < a+5$, откуда $-3 < a < 2$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ достигается либо при $x = a$, либо при $x = a+5$. Наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, a+5]$ достигается при $x = 2$. Получаем систему:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -3 < a < 2, \\ f(a) \leq 10, \\ f(a+5) \leq 10, \\ f(2) \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ (a-2)^2 + a - 4 \leq 10, \\ (a+3)^2 + a - 4 \leq 10, \\ a - 4 \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ a^2 - 3a - 10 \leq 0, \\ a^2 + 7a - 5 \leq 0, \\ a \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ -2 \leq a \leq 5, \\ \frac{-7 - \sqrt{69}}{2} \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}, \\ a \geq -6, \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}. \begin{cases} -3 < a < 2, \\ f(a) \leq 10, \\ f(a+5) \leq 10, \\ f(2) \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ (a-2)^2 + a - 4 \leq 10, \\ (a+3)^2 + a - 4 \leq 10, \\ a - 4 \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ a^2 - 3a - 10 \leq 0, \\ a^2 + 7a - 5 \leq 0, \\ a \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2, \\ -2 \leq a \leq 5, \\ \frac{-7 - \sqrt{69}}{2} \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}, \\ a \geq -6, \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $-2 \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}$.

№ 19.