

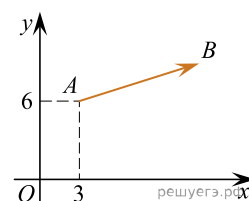
Вариант 119

№ 1.

Два угла треугольника равны 33° и 105° . Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

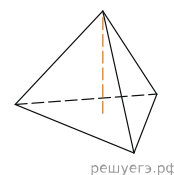
№ 2.

Вектор $\vec{AB}$ началом в точке $A(3;6)$ имеет координаты $(9;3)$. Найдите сумму координат точки B .



№ 3.

В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 5, а сторона основания равна $3\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.



№ 4.

В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 1 и 2 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 1 и 2 очка. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

№ 6.

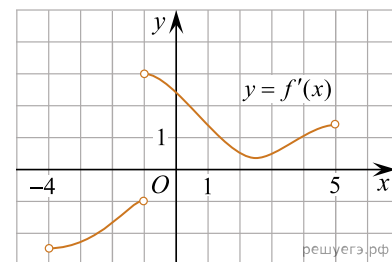
Найдите корень уравнения $2^{4-2x} = 64$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\log_{0,3} 10 - \log_{0,3} 3$.

№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуинтервале $[-4; 5)$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

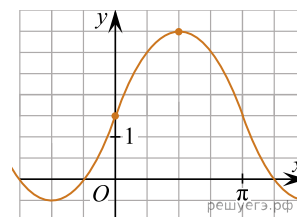
На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н ? Ответ выразите в метрах.

№ 10.

От пристани A к пристани B , расстояние между которыми равно 420 км , отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч .

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите a .



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 15 + 12x + x^3$ на отрезке $[-2; 2]$.

№ 13.

- Решите уравнение $2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin(2\pi - x) + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{6} \cos x$.
- Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA' равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK=1$. Точки M и L — середины рёбер $A'C'$ и $B'C'$ соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L .

- а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ .
 - б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ .
-

№ 15.

Решите неравенство $7^{\ln(x^2-2x)} \leq (2-x)^{\ln 7}$.

№ 16.

1 апреля 2017г. Андрей Петрович положил 10 000 рублей на банковский вклад сроком на 1 год с ежемесячным начислением процентов и капитализацией под $a\%$ годовых. Это означает, что первого числа каждого месяца сумма вклада увеличивается на одно и то же количество процентов, рассчитанное таким образом, что за 12 месяцев она увеличится ровно на $a\%$. Через 6 месяцев сумма вклада составила 10 500 рублей. Найдите a .

№ 17.

Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17.

- а) Докажите, что диагонали перпендикулярны.
 - б) Найдите площадь трапеции.
-

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

$$\frac{\log_{2025}(x^2 + (2a+1)x + a^2 + a + 2026) - \log_{2025}(2x^2 + x + a^2 - a + 2025)}{\sqrt{3x - a + 2025} \cdot \log_{2025}(2x + a - 3)} = 0$$

имеет единственный корень.

№ 19.

На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 165. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

- а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
 - б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз больше, чем сумма исходных чисел?
 - в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ

1	47363	138
2	27726	21
3	522968	4
4	283579	0,995
5	508890	0,1
6	26650	-1
7	26850	-1
8	551783	9
9	27967	2
10	26590	20
11	509287	2
12	530400	-17

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$0,5 \sin^2 6x - \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} - 3x \right) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 3x \cos^2 3x - \cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow (2 \sin^2 3x - 1) \cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3x = 0 \\ \sin^2 3x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \sin 3x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ 3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни при помощи двойных неравенств:

$$0 < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < \frac{k}{3} < \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 1 \Leftrightarrow_{k \in \mathbb{Z}} k = 0.$$

Найденному значению k соответствует корень $\frac{\pi}{6}$.

$$0 < \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} < \frac{k}{6} < \frac{5}{12} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{5}{2} \Leftrightarrow_{k \in \mathbb{Z}} \begin{cases} k = 0, \\ k = 1, \\ k = 2. \end{cases}$$

Найденным значениям k соответствуют корни $\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{12}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6} : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Построим сечение призмы плоскостью γ . Проведём $KP \parallel AC$, $P \in CB$, $CP=1$. Проведём PL , проведём $LR \parallel AC$, $R \in A'B'$. Проведём RK . Трапеция $LPKR$ — искомое сечение. Сечение параллельно AC по признаку параллельности прямой к плоскости.

Введём систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат: $B(0; 0; 0)$, $C(0; 6; 0)$, $B'(0; 0; 3)$, $C'(0; 6; 3)$, $A(3\sqrt{3}; 3; 0)$, $A'(3\sqrt{3}; 3; 3)$, $P(0; 5; 0)$, $T\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 0\right)$, $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right)$, $K\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$.

Тогда

$$\vec{BM} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right), \quad \vec{KP} = \left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0\right), \quad \vec{LP} = (0; 2; -3).$$

Откуда получаем:

$$\vec{BM} \cdot \vec{KP} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right) \cdot \left(\frac{-5\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; 0\right) = -\frac{45}{4} + \frac{45}{4} + 0 = 0.$$

$$\vec{BM} \cdot \vec{LP} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{9}{2}; 3\right) \cdot (0; 2; -3) = 0 + 9 - 9 = 0.$$

Так как $\vec{BM} \perp \vec{KP}$ и $\vec{BM} \perp \vec{LP}$ получаем, что $BM \perp (KLP)$.

б) Далее заметим, что плоскость сечения перпендикулярна вектору $\vec{BM}$, найдем уравнение плоскости и вычислим расстояние от точки до плоскости.

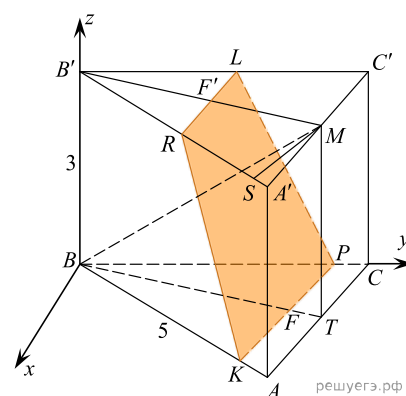
Найдём свободный член D в уравнении плоскости $\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{9}{2}y + 3z + D = 0$, подставив координаты точки K :

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2} \cdot \frac{5}{2} + 3 \cdot 0 + D = 0 \Leftrightarrow \frac{45}{4} + \frac{45}{4} + D = \frac{90}{4} + D = \frac{45}{2} + D, \text{ поэтому } D = -\frac{45}{2}.$$

Упростив уравнение плоскости, получим: $\sqrt{3}x + 3y + 2z - 15 = 0$.

Тогда для искомого расстояния получаем:

$$d(C; (KLP)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{3 + 9 + 4}} = \frac{3}{4}.$$



решуегэ.рф

а) Четырёхугольник $RLPK$ — искомое сечение. Проведём плоскость $BMTB$.
Имеем:

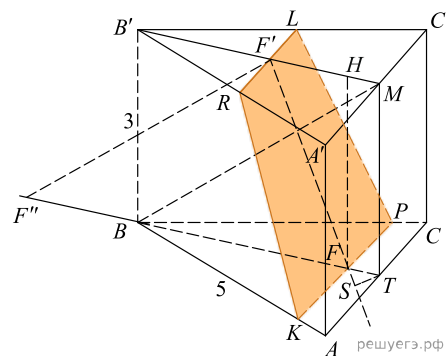
$$B'M \cap RL = F', \quad BT \cap KP = F, \quad (B'MT) \cap \gamma = F'F.$$

Рассмотрим прямоугольник $BBMT$. Заметим, что LR — средняя линия треугольника ABC , тогда F — середина BM , тогда

$$F'M = \frac{1}{2}B'M = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\frac{FT}{BT} = \frac{KA}{BA} \quad (\triangle BKF \sim \triangle BAT):$$

$$\frac{FT}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow FT = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Пусть теперь $FH \parallel MT$, $H \in B'M$. Тогда $F'H = F'M - FT = \sqrt{3}$.

$$BM = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = 6. \quad F'F = \sqrt{F'H^2 + HF^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}.$$

На продолжении TB за точку B отметим точку F , такую, что $F''B = F'M = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Тогда $F''F' \parallel BM$ и $F''F' = 6$.
Далее,

$$F''F = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3},$$

$$6^2 + (2\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow (F''F')^2 + (F'F)^2 = (F''F)^2.$$

По обратной теореме Пифагора, треугольник FFF' прямоугольный ($F''F' \perp F'F$), следовательно, $BM \perp FF'$.

б) Заметим, что поскольку $(AC) \parallel \gamma$, то $d(C, \gamma) = d(T, \gamma)$. Пусть основанием перпендикуляра опущенного из T на γ будет являться точка S . Тогда $TS \parallel BM \parallel FF'$. Таким образом, треугольники FTS и FFF' будут подобны. Следовательно,

$$\frac{TS}{F''F'} = \frac{FT}{FF''}, \quad \text{откуда} \quad TS = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6}{4\sqrt{3}} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{3}{4}$.

Еще один подход к решению задачи, не использующий метод координат, укажем на примере задачи [514653](#).

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Воспользуемся свойством $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, получим:

$$\begin{aligned} 7^{\ln(x^2-2x)} &\leq (2-x)^{\ln 7} \Leftrightarrow 7^{\ln(x^2-2x)} \leq 7^{\ln(2-x)} \Leftrightarrow \ln(x^2-2x) \leq \ln(2-x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x > 0, \\ x^2-2x \leq 2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x > 0, \\ (x-2)(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0. \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x^2 - 2x) \leq \ln(2 - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ x^2 - 2x \leq 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ (x - 2)(x + 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < 0.$$

Ответ: $[-1; 0)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть каждый месяц сумма вклада увеличивается на k процентов, а $K = 1 + \frac{k}{100}$. Тогда через шесть месяцев сумма вклада будет равна $10000 \cdot K^6$, а через двенадцать месяцев — $10000 \cdot K^{12}$. Справедливы следующие равенства:

$$10000 \cdot K^6 = 10500,$$

$$10000 \cdot K^{12} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{a}{100}\right).$$

Выразим a из второго равенства:

$$a = (K^{12} - 1) \cdot 100 = ((K^6)^2 - 1) \cdot 100,$$

подставим значение K^6 из первого равенства:

$$a = \left(\left(\frac{10500}{10000} \right)^2 - 1 \right) \cdot 100 = (1,05^2 - 1) \cdot 100 = (1,1025 - 1) \cdot 100 = 10,25. \quad a = \left(\left(\frac{10500}{10000} \right)^2 - 1 \right) \cdot 100 =$$

$$= (1,05^2 - 1) \cdot 100 = (1,1025 - 1) \cdot 100 = 10,25.$$

Ответ: 10,25.

Приведём решение Валентина Евстафьева (Санкт-Петербург).

За первые 6 месяцев на начальную сумму 10 тыс. руб. была начислена прибыль 500 руб. Поскольку процент за месяц постоянен, то и за вторые 6 месяцев на эту начальную сумму была начислена такая же прибыль. А на прибыль первого полугодия, равную 500 руб., была начислена прибыль 25 руб. (поскольку 500 руб. в 20 раз меньше 10 тыс. руб., то и прибыль от 500 руб. в 20 раз меньше прибыли от 10 тыс. руб.). Таким образом, общая прибыль за год была равна $500 + 500 + 25 = 1025$ руб., что составляет 10,25% от вложенной суммы.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

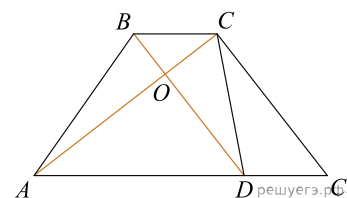
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проведем через точку C прямую параллельную BD . На пересечении этой прямой и прямой AD отметим точку C_1 , BCC_1D — параллелограмм.

В треугольнике ACC_1 : $AC = 15$, $CC_1 = BD = 8$, $AC_1 = AD + DC_1 = 17$.

Заметим, что $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$, поскольку $289 = 225 + 64$, тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ACC_1 прямоугольный, угол ACC_1 прямой. Тогда угол COD прямой, что и требовалось доказать.

$$б) S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60.$$



Ответ: б) 60.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Аргументы логарифмов в числителе дроби положительны:

$$\begin{aligned}
 x^2 + (2a+1)x + a^2 + a + 2026 &= x^2 + 2ax + a^2 + x + a + 2026 = (x+a)^2 + (x+a) + 2026 = \\
 &= (x+a)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x+a) + \frac{1}{4} + 2026 - \frac{1}{4} = \left(x+a+\frac{1}{2}\right)^2 + 2025\frac{3}{4} > 0.
 \end{aligned}$$

Значит, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + (2a+1)x + a^2 + a + 2026 = 2x^2 + x + a^2 - a + 2025, \\ 3x - a + 2025 > 0, \\ 2x + a - 3 > 0, \\ 2x + a - 3 \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Решим уравнение из полученной системы:

$$\begin{aligned} x^2 + (2a+1)x + a^2 + a + 2026 - (2x^2 + x + a^2 - a + 2025) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - (2a+1-1)x - 1 \cdot (2a+1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2a+1. \end{cases} \end{aligned}$$

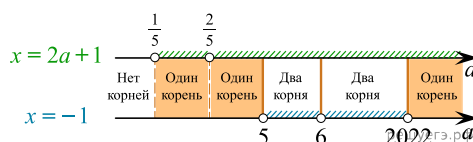
Число -1 является корнем исходного уравнения при

$$\begin{cases} 3 \cdot (-1) - a + 2025 > 0, \\ 2 \cdot (-1) + a - 3 > 0, \\ 2 \cdot (-1) + a - 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 2022, \\ a > 5, \\ a \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 < a < 6, \\ 6 < a < 2022. \end{cases}$$

Число $2a+1$ является корнем исходного уравнения при

$$\begin{cases} 3 \cdot (2a+1) - a + 2025 > 0, \\ 2 \cdot (2a+1) + a - 3 > 0, \\ 2 \cdot (2a+1) + a - 3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a > -2028, \\ 5a > 1, \\ 5a \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{5}, \\ a \neq \frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} < a < \frac{2}{5}, \\ a > \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Числа -1 и $2a+1$ совпадают при $a = -1$, но при таком значении a , эти числа не являются корнями уравнения. Следовательно, ни при каких значениях a корни уравнения не совпадают.



Таким образом, исходное уравнение

- при $5 < a < 6$ и $6 < a < 2022$ имеет два корня;
- при $\frac{1}{5} < a < \frac{2}{5}$, $\frac{2}{5} < a \leq 5$, $a = 6$ и $a \geq 2022$ имеет **один корень**;
- при прочих значениях a корней не имеет.

Ответ: $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; 5\right] \cup \{6\} \cup [2022; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть первоначально на доске 7 раз было записано число 19 и один раз число 32. Тогда сумма этих чисел равна 165. После перестановки цифр на доске 7 раз оказалось записано число 91 и один раз число 23. Сумма этих чисел равна $660 = 4 \cdot 165$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}, \dots, \overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \dots + a_n$, $B = b_1 + \dots + b_n$. По условию $10A + B = 165$ и $10B + A = 5 \cdot 165$. Тогда разность этих чисел равна $9(B - A) = 4 \cdot 165$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1 b_1}, \dots, \overline{a_n b_n}$. Обозначим $A = a_1 + \dots + a_n$, $B = b_1 + \dots + b_n$. По условию $10A + B = 165$ и нужно найти наибольшее значение числа $S = 10B + A$. Тогда

$$S = 10B + A = 10(165 - 10A) + A = 1650 - 99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A . Поскольку $b_1 \leq 9a_1, \dots, b_n \leq 9a_n$, получаем $B \leq 9A$. Поэтому $165 = 10A + B \leq 10A + 9A = 19A$, откуда $A \geq \frac{165}{19} > 8$, то есть $A \geq 9$. Значит,

$$S = 1650 - 99A \leq 1650 - 99 \cdot 9 = 759.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 759. Пусть первоначально на доске 8 раз было записано число 19 и один раз число 13. Тогда сумма этих чисел равна 165. После перестановки цифр на доске 8 раз оказалось записано число 91 и один раз число 31. Сумма этих чисел равна 759.

Ответ: а) да, например 7 раз число 19 и один раз число 32; б) нет; в) 759.
