

# Вариант 120

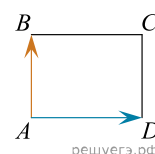
## № 1.

Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 18, а отношение соседних сторон равно  $1 : 2$ .



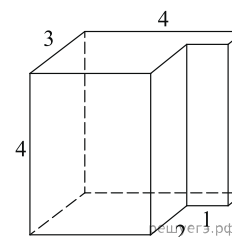
## № 2.

Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 6 и 8. Найдите длину разности векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .



## № 3.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



## № 4.

В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

## № 5.

При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше, чем 810г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 790г, равна 0,91. Найдите вероятность того, что масса буханки больше, чем 790 г, но меньше, чем 810 г.

## № 6.

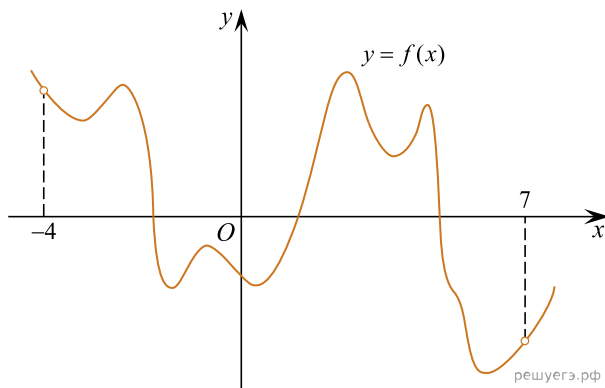
Решите уравнение  $\frac{x-6}{7x+3} = \frac{x-6}{5x-1}$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

№ 7.

Найдите значение выражения  $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m} \cdot \sqrt[18]{m}}$  при  $m = 64$ .

№ 8.

На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . Найдите количество точек минимума функции  $f(x)$ , принадлежащих интервалу  $(-4; 7)$ .



№ 9.

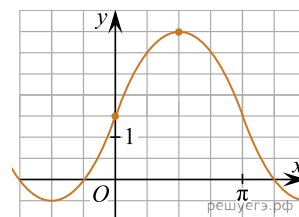
Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью  $v_0 = 20$  м/с, начал торможение с постоянным ускорением  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>. За  $t$  секунд после начала торможения он прошёл путь  $s = v_0 t - \frac{at^2}{2}$  (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 30 метров. Ответ выразите в секундах.

№ 10.

Расстояние между городами  $A$  и  $B$  равно 435 км. Из города  $A$  в город  $B$  со скоростью 60 км/ч выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города  $B$  выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города  $A$  автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции  $f(x) = a \sin x + b$ . Найдите  $a$ .



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции  $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x + 1$  на отрезке  $[1; 9]$ .

---

**№ 13.**

а) Решите уравнение  $\cos \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} = 4 \sin^2(\pi + x) \cos^2(\pi - x) - \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\pi; 3\pi]$ .

---

**№ 14.**

В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  через середину  $M$  диагонали  $AC_1$  проведена плоскость  $\alpha$  перпендикулярно этой диагонали,  $AB = 5$ ,  $BC = 3$  и  $AA_1 = 4$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  содержит точку  $D_1$ .

б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит ребро  $A_1 B_1$ .

---

**№ 15.**

Решите неравенство  $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$ .

---

**№ 16.**

В июле 2025 года планируется взять кредит на 600 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно  $r$ , если общая сумма выплат составит 930 тысяч рублей?

---

**№ 17.**

Точка  $E$  — середина стороны  $BC$  квадрата  $ABCD$ . Серединные перпендикуляры к отрезкам  $AE$  и  $EC$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что  $\angle AOE = 90^\circ$ .

б) Найдите  $BO : OD$ .

---

**№ 18.**

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a \cdot (y^2 + 2) = x + 1 - y^4, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

имеет ровно пять различных решений.

№ 19.

а)Приведите пример десяти таких различных двузначных чисел, среди которых ровно 5 делятся на 2, ровно 5 делятся на 3, ровно 5 делятся на 5 и ровно 3 делятся на 6.

б)Существуют ли такие десять различных двузначных чисел, среди которых ровно 7 делятся на 3, ровно 7 делятся на 5, ровно 7 делятся на 7?

в)Про десять различных двузначных чисел известно, что наибольший общий делитель любых двух из них равен 1, 2, 3, 5 или 7. Какое наибольшее количество из этих десяти чисел может делиться на 7?

## Ответы

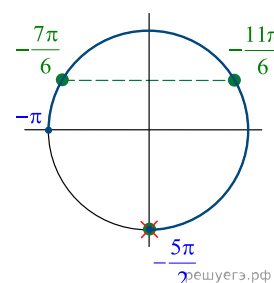
| Номер | Задание                | Ответ |
|-------|------------------------|-------|
| 1     | <a href="#">27603</a>  | 18    |
| 2     | <a href="#">27709</a>  | 10    |
| 3     | <a href="#">27189</a>  | 40    |
| 4     | <a href="#">320170</a> | 0,25  |
| 5     | <a href="#">509313</a> | 0,88  |
| 6     | <a href="#">101879</a> | 6     |
| 7     | <a href="#">26842</a>  | 4     |
| 8     | <a href="#">523394</a> | 5     |
| 9     | <a href="#">27965</a>  | 2     |
| 10    | <a href="#">99590</a>  | 240   |
| 11    | <a href="#">509287</a> | 2     |
| 12    | <a href="#">77458</a>  | 10    |

№ 13.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                | Баллы    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.                                                                                                                                                   | 2        |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а),<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б). | 1        |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                  | 0        |
| <b>Максимальный балл</b>                                                                                                                                                                              | <b>2</b> |

**Решение.** а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x (\operatorname{ctg} x - \cos x) = 2 \sin^2 x &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -1, \operatorname{tg} x (\operatorname{ctg} x - \cos x) = 2 \sin^2 x \Leftrightarrow \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = -1, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$



Корни уравнения  $\sin x = -1$  не удовлетворяют условию  $\cos x \neq 0$ . Тогда получаем:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ , с помощью единичной окружности. Получаем  $-\frac{11\pi}{6}$ ,  $-\frac{7\pi}{6}$ .

Ответ: а)  $\left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ; б)  $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$ .

#### № 14.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                 | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                    | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                          | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а),<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                      | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                      | 3     |

**Решение. Приведем решение при помощи векторов.** Введём базис  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AA_1}$ . Длины базисных векторов известны: 5, 3 и 4 соответственно.

а) Достаточно показать, что вектор  $\vec{MD_1}$  перпендикулярен вектору  $\vec{AC_1}$ :

$$\vec{MD_1} \cdot \vec{AC_1} = \left(-\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1}\right) \cdot (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}).$$

Попарные произведения базисных векторов равны нулю, поэтому выражение принимает вид:

$$\vec{MD_1} \cdot \vec{AC_1} = -\frac{1}{2}\vec{AB}^2 + \frac{1}{2}\vec{AD}^2 + \frac{1}{2}\vec{AA_1}^2 = \frac{1}{2}(-25 + 16 + 9) = 0.$$

б) Достаточно найти точку  $T$  на ребре  $A_1B_1$  такую, что  $\vec{MT} \cdot \vec{AC_1} = 0$ . Получаем:

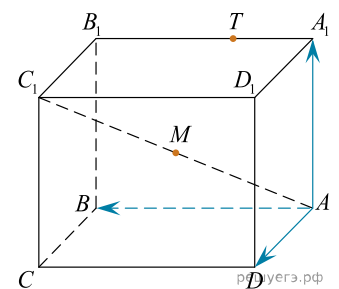
$$(\vec{MA_1} + t\vec{A_1B_1}) \cdot \vec{AC_1} = 0,$$

$$\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AA_1}\right) \cdot (\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA_1}) = 0,$$

откуда

$$\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot 25 - \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow 25t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{9}{25}.$$

Значит, точка  $T$  делит ребро  $A_1B_1$  в отношении 9 : 16, считая от точки  $A_1$ .



**Приведем решение методом координат (Ирина Шраго).**

а) Введем систему координат с центром в точке  $B$ , направив ось  $Ox$  вдоль ребра  $BA$ , ось  $Oy$  вдоль ребра  $BC$  и ось  $Oz$  вдоль ребра  $BB_1$ . В этой системе координат:  $A(5; 0; 0)$ ;  $C_1(0; 3; 4)$ ;  $D_1(5; 3; 4)$ ;  $M(2,5; 1,5; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC_1} = (-5; 3; 4)$ . Запишем уравнение плоскости  $\alpha$ , проходящей через точку  $M$  перпендикулярно прямой  $AC_1$ :

$$-5(x - 2,5) + 3(y - 1,5) + 4(z - 2) = 0 \Leftrightarrow -5x + 3y + 4z = 0.$$

Координаты точки  $D_1$  удовлетворяют уравнению плоскости  $\alpha$ :  $-5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 0$ , следовательно, точка  $D_1$  принадлежит плоскости.

б) Пусть плоскость  $\alpha$  пересекает ребро  $A_1B_1$  в точке  $T(t; 0; 4)$ . Тогда  $-5 \cdot t + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 0$ , откуда  $t = \frac{16}{5}$ . Следовательно,

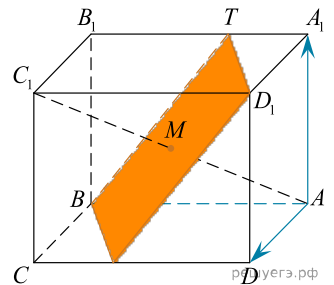
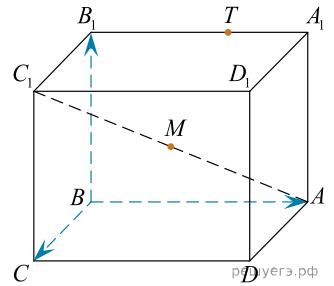
$$-\frac{B_1T}{TA_1} = \frac{\frac{16}{5}}{5 - \frac{16}{5}} = \frac{16}{9}.$$

Следовательно, плоскость  $\alpha$  делит ребро  $A_1B_1$  в отношении 16:9, считая от вершины  $B_1$ , или в отношении 9:16, считая от вершины  $A_1$ .

**Примечание.**

Сечения параллелепипеда плоскостью, перпендикулярной его диагонали, может быть треугольником, четырех-, пяти- или шестиугольником, поэтому построить сечение можно только решив пункта). Далее заметим, что точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии, поэтому наряду с точкой  $D_1$  сечение содержит и центрально симметричную ей точку  $B$ . Осталось провести отрезки  $TB$  и  $TD_1$ , а в противоположных гранях — параллельные им отрезки, проходящие через точки  $D_1$  и  $B$  соответственно (см. рис.)

Читателю будет полезно сравнить решение этой задачи с задачами [561194](#) и [556601](#).



**Приведём другое решение.**

б) Чтобы решить задачу, достаточно построить прямую, по которой плоскость сечения пересекает верхнее основание параллелепипеда. Для этого в прямоугольнике  $AA_1C_1C$  через точку  $M$  проведем перпендикулярно диагонали  $AC_1$  прямую  $MK$ . Далее, в плоскости верхнего основания параллелепипеда через точку  $K$  перпендикулярно диагонали  $A_1C_1$  проведем прямую  $KT$ . Прямая  $A_1C_1$  является проекцией прямой  $AC_1$  на плоскость верхнего основания, поэтому прямая  $KT$  также перпендикулярна прямой  $AC_1$  в силу теоремы, обратной теореме о трех перпендикулярах. Плоскость, проходящая через две пересекающиеся прямые, перпендикулярные данной прямой, перпендикулярна этой прямой. Поэтому плоскость, проходящая через точки  $M$ ,  $T$  и  $K$ , есть плоскость  $\alpha$ . Таким образом, плоскость сечения пересекает верхнее основание по прямой  $TK$ .

Прямоугольные треугольники  $KMC_1$  и  $AA_1C_1$  подобны, поэтому  $C_1K : AC_1 = C_1M : A_1C_1$ , откуда

$$C_1K = \frac{C_1M \cdot AC_1}{AC_1} = \frac{\frac{\sqrt{50}}{2} \cdot \sqrt{50}}{\sqrt{34}} = \frac{25\sqrt{34}}{34},$$

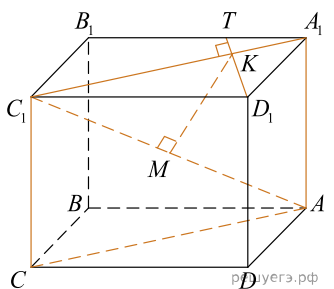
а потому  $A_1K = \frac{9\sqrt{34}}{34}$ .

В силу подобия прямоугольных треугольников  $TKA_1$  и  $C_1B_1A_1$  находим:  $\frac{TA_1}{A_1C_1} = \frac{A_1K}{A_1B_1}$ , откуда

$$TA_1 = \frac{A_1K \cdot A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{\frac{9\sqrt{34}}{34} \cdot \sqrt{34}}{5} = \frac{9}{5}.$$

а потому  $\frac{A_1T}{A_1B_1} = \frac{9}{25}$ . Таким образом,

$$A_1T = \frac{9}{25}A_1B_1,$$



$$TB_1 = \frac{16}{25}TB_1,$$

$$A_1T : TB_1 = \frac{9}{16}.$$

Следовательно, плоскость  $\alpha$  делит ребро  $A_1B_1$  в отношении  $16 : 9$ , считая от вершины  $B_1$ .

а) Покажем, что  $KT + KD_1 = TD_1$ . Найдем катеты прямоугольных треугольников  $TKA_1$  и  $A_1KD_1$  по теореме Пифагора и сложим их длины:

$$TK = \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{81}{34}} = \frac{27}{5\sqrt{34}},$$

$$KD_1 = \sqrt{9 - \frac{81}{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}},$$

$$TK + KD_1 = 27 + \frac{75}{5\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{5}.$$

Гипотенуза прямоугольного треугольника  $TA_1D_1$  имеет ту же длину:

$$TD_1 = \sqrt{\frac{81}{25} + 9} = \frac{3\sqrt{34}}{5}.$$

Таким образом, точки  $T, K$  и  $D_1$  лежат на одной прямой, а значит, плоскость сечения пересекает верхнее основание параллелепипеда по отрезку  $TD_1$ , то есть содержит вершину  $D_1$ . Это и требовалось доказать.

Ответ: б) в отношении  $16 : 9$ , считая от вершины  $B_1$ .

№ 15.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                            | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                  | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                              | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                 | 2     |

**Решение.** Решим неравенство:

$$\begin{aligned}
 x + \frac{20}{x+6} \geq 6 &\Leftrightarrow x + \frac{20-6x-36}{x+6} \geq 0 \Leftrightarrow x - \frac{6x+16}{x+6} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{x^2-16}{x+6} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x+4)(x-4)}{x+6} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6, \\ x \leq 4, \\ x \geq 4. \end{cases} \quad x + \frac{20}{x+6} \geq 6 \Leftrightarrow x + \frac{20-6x-36}{x+6} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x - \frac{6x+16}{x+6} &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-16}{x+6} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{(x+4)(x-4)}{x+6} &\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -6, \\ x \leq 4, \\ x \geq 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ:  $(-6; -4] \cup [4; +\infty)$ .

№ 16.

| Критерии оценивания выполнения задания                              | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| Максимальный балл                                                   | 2     |

**Решение.** Кредит погашается в течение 6 лет, причем долг уменьшается равномерно, значит, каждый год он уменьшается на 100 тыс. руб. Тогда первая выплата равна  $\frac{r}{100} \cdot 600 + 100$  тыс.руб., вторая выплата равна  $\frac{r}{100} \cdot (600 - 100) + 100$  тыс.руб., третья выплата равна  $\frac{r}{100} \cdot (600 - 200) + 100$  тыс.руб. В следующие три года выплаты равны соответственно:  $\frac{15}{100} \cdot 300 + 100$  тыс. руб.,  $\frac{15}{100} \cdot 200 + 100$  тыс.руб. и  $\frac{15}{100} \cdot 100 + 100$  тыс.руб. Общая сумма выплат составляет:

$$600 + \frac{r}{100} \cdot (600 + 500 + 400) + \frac{15}{100} \cdot (300 + 200 + 100) = 600 + 15r + 90 = 690 + 15r \text{ тыс. руб.}$$

Следовательно, что  $690 + 15r = 930$ , откуда  $r = 16$ .

Ответ: 16.

№ 17.

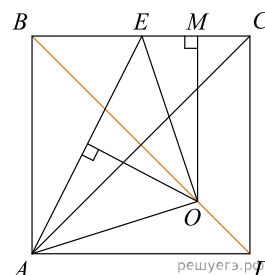
| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                    | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                        | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br><br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                          | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а)<br><br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                         | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                         | 3     |

**Решение.** а) Точка  $O$  является центром окружности, описанной около треугольника  $AEC$ , поэтому  $\angle AOE = 2\angle ACE = 90^\circ$ .

б) Прямая  $BD$  является серединным перпендикуляром к отрезку  $AC$ , поэтому точка  $O$  лежит на этой прямой. Пусть точка  $M$  — середина отрезка  $EC$ . По теореме Фалеса параллельные прямые  $MO$  и  $CD$  отсекают на сторонах угла  $CBD$  пропорциональные отрезки, поэтому

$$BO : OD = BM : MC = 3 : 1.$$

Ответ: б) 3 : 1.



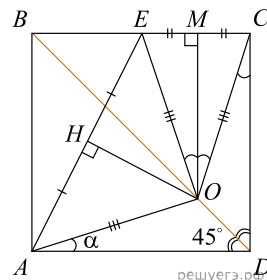
**Примечание.**

Пункт а) может быть решен при помощи поворота.

**Приведем решение пункта а) Артема Калмыкова (Уфа).**

Треугольник  $AOE$ — равнобедренный, так как отрезок  $OH$  является одновременно и высотой, и медианой. Тогда  $AO = EO$ . Аналогично треугольник  $EOC$ — равнобедренный, в нем  $EO = OC$ , поэтому  $AO = OC$ . Треугольники  $AOD$  и  $COD$  равны по трем сторонам, поэтому  $\angle ADO = \angle CDO = 45^\circ$ , а значит, точка  $O$  лежит на диагонали  $BD$ .

Пусть  $\angle DAO = \alpha$ , тогда  $\angle DCO = \alpha$ . Углы  $COM$  и  $DCO$  равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых  $OM$  и  $DC$  секущей  $OC$ . Луч  $OM$ — биссектриса угла  $EOC$ , поэтому  $\angle EOC = 2\alpha$ . Находим:



$$\begin{aligned} \angle AOE + \angle AOD + \angle DOC + \angle EOC &= 360^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \angle AOE + (180^\circ - \alpha - 45^\circ) + (180^\circ - \alpha - 45^\circ) + 2\alpha &= 360^\circ \Leftrightarrow \angle AOE = 90^\circ. \quad \angle AOE + \angle AOD + \angle DOC + \angle EOC = 360^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \angle AOE + (180^\circ - \alpha - 45^\circ) + (180^\circ - \alpha - 45^\circ) + 2\alpha &= 360^\circ \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \angle AOE = 90^\circ. \end{aligned}$$

**№ 18.**

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Баллы |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 4     |
| С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет                                                                                                                                                                                                                                                             | 3     |
| С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ<br>в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений                                                                                          | 2     |
| В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ<br>в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами) | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 4     |

**Решение.** Заметим, что если пара чисел  $(x; y)$  является решением системы, то и пара чисел  $(x; -y)$  тоже является решением системы. Значит, нечетное число решение возможно только если одним из решений является пара чисел  $(x; 0)$ . Найдём при каких значениях параметра  $a$ , пара  $(x; 0)$  является решением системы:

$$\begin{cases} a \cdot (0 + 2) = x + 1 - 0, \\ x^2 + 0 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = x + 1, \\ \begin{cases} x = -3, \\ x = 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -3, \\ a = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ a = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Пусть  $y^2 = t \geq 0$ .

Определим число решений исходной системы при найденных значениях параметра  $a$ .  
При  $a = -1$  получаем:

$$\begin{cases} -(y^2 + 2) = x + 1 - y^4, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^4 - y^2 - 3, \\ y^2 = 9 - x^2. \end{cases}$$

тогда каждому значению  $t > 0$  соответствуют два значения  $y$ , а  $t = 0$  — одно значение  $y = 0$ .  
Изобразим в системе координат  $xOt$  графики уравнений системы

$$\begin{cases} x = t^2 - t - 3, \\ t = 9 - x^2, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

При  $t \geq 0$  графики уравнений имеют три общие точки  $A(x_A; t_A)$ ,  $B(x_B; t_B)$  и  $C(x_C; t_C)$ , где  $t_A = 0$ , а  $t_C > t_B > 0$ . Тогда, исходная система имеет ровно пять решений:

$(-3; 0)$ ,

$(x_B; -\sqrt{t_B})$ ,

$(x_B; \sqrt{t_B})$ ,

$(x_C; -\sqrt{t_C})$ ,

$(x_C; \sqrt{t_C})$ ,

значит,  $a = -1$  удовлетворяет условию задачи.

При  $a = 2$  получаем

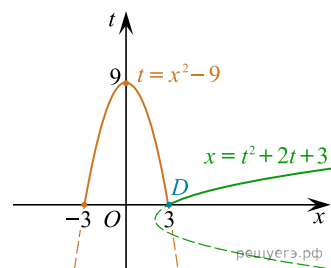
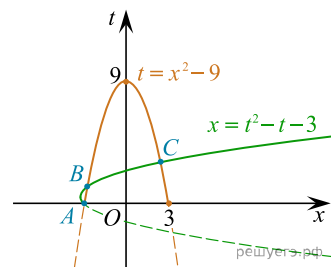
$$\begin{cases} 2 \cdot (y^2 + 2) = x + 1 - y^4, \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^4 + 2y^2 + 3, \\ y^2 = 9 - x^2. \end{cases}$$

Пусть  $y^2 = t \geq 0$ , тогда каждому значению  $t > 0$  соответствуют два значения  $y$ , а значению  $t = 0$  — одно значение  $y = 0$ . Изобразим в системе координат  $xOt$  графики уравнений системы

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t + 3, \\ t = 9 - x^2, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

При  $t \geq 0$  графики уравнений имеют одну общую точку  $D(3; 0)$ . Тогда исходная система тоже имеет ровно одно решение  $(-3; 0)$ , значит,  $a = 2$  не удовлетворяет условию задачи.

Ответ:  $-1$ .



№ 19.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                          | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.                                                                                                                                                                                                           | 4     |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.                                                                                                                                                                                                       | 3     |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.                                                                                                                                                                                                       | 2     |
| Верно получен один из следующих результатов: <ul style="list-style-type: none"> <li>— обоснованное решение пункта а;</li> <li>— обоснованное решение пункта б;</li> <li>— оценка в пункте в;</li> <li>— пример в пункте в, обеспечивающий точность найденной оценки.</li> </ul> | 1     |

|                                                                      |   |
|----------------------------------------------------------------------|---|
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. | 0 |
| Максимальный балл                                                    | 4 |

**Решение.** а) Подходящим примером являются числа 10, 12, 18, 20, 24, 27, 33, 35, 55, 65.

б) Если среди десяти различных двузначных чисел ровно 7 делятся на 3 и ровно 7 делятся на 5, то среди них не менее четырёх, которые делятся на  $3 \cdot 5 = 15$ . Если, кроме того, среди этих десяти чисел есть ровно 7, которые делятся на 7, то среди них найдётся хотя бы одно число, которое делится на  $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ . Но такого двузначного числа не существует. Пришли к противоречию.

в) Двузначные числа, делящиеся на 7, можно представить в виде  $7p_i$ , где  $p_i$  — натуральное число от 2 (поскольку  $7 \cdot 2 = 14$ ) до 14 (поскольку  $7 \cdot 14 = 98$ ). Для любой пары таких чисел  $p_i$  должны быть взаимно простыми, поскольку иначе наибольший общий делитель таких чисел будет больше 7. Среди чисел от 2 до 14 можно выбрать только 6 чисел, таких, что любые два из них будут взаимно простыми, это числа 2, 3, 5, 7, 11, 13. Таким образом, при заданных условиях чисел, делящихся на 7, не может быть больше шести. Покажем, что их может быть ровно шесть. Это, например, следующий набор из десяти чисел: 14, 21, 35, 49, 77, 91, 17, 19, 23, 41. В этом наборе наибольший общий делитель для первых шести чисел равен 7, а наибольший общий делитель любого из последних чисел с любым другим числом набора равен 1.

Ответ: а) например, 10, 12, 18, 20, 24, 27, 33, 35, 55, 65; б) нет; в) 6.