

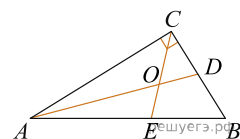
Вариант 121

№ 1.

На окружности по разные стороны от диаметра MN взяты точки K и P . Известно, что $\angle MNP = 36^\circ$. Найдите $\angle PKN$. Ответ дайте в градусах.

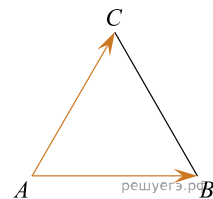
№ 2.

Острый угол прямоугольного треугольника равен 32° . Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.



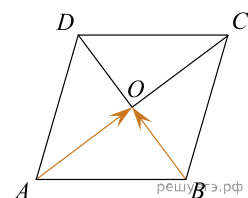
№ 3.

Стороны правильного треугольника ABC равны 3. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.



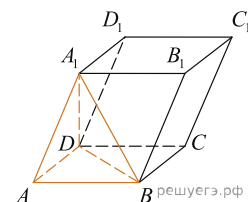
№ 4.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{AO}$ и $\vec{BO}$.



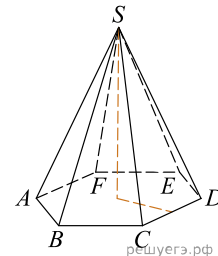
№ 5.

Найдите объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, если объем треугольной пирамиды $ABDA_1$ равен 3.



№ 6.

Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в четыре раза?



№ 7.

В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

№ 8.

На тарелке 16 пирожков: 7 с рыбой, 5 с вареньем и 4 с вишней. Юля наугад выбирает один пирожок. Найдите вероятность того, что он окажется с вишней.

№ 9.

В коробке 7 красных и 3 синих шара. Случайным образом из коробки извлекают 5 шаров. Какова вероятность события «среди извлеченных не более 3 красных шаров»?

№ 10.

Правильный игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не стала больше чем 3. Известно, что общая сумма очков оказалась равна 4. Какова вероятность того, что был сделан ровно один бросок? Ответ округлите до сотых.

№ 11.

Найдите корень уравнения $\log_5(5 - x) = 2\log_5 3$.

№ 12.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$.

№ 13.

Найдите значение выражения $\frac{6^{\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}}}{42^{\sqrt{3}-1}}$.

№ 14.

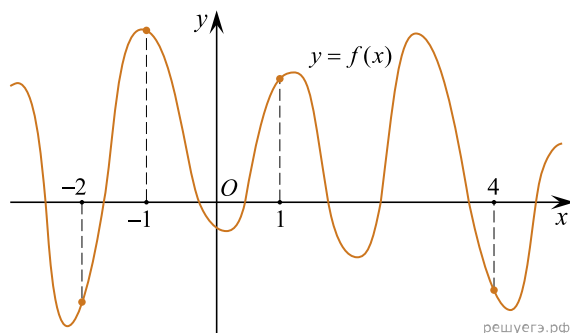
Найдите значение выражения $\frac{(2^{\frac{3}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{3}})^{15}}{10^9}$.

№ 15.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 6t^2 - 48t + 17$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость (в м/с) в момент времени $t = 9$ с.

№ 16.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-2, -1, 1, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



№ 17.

Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2000 Н, масса автомобиля — 1500 кг, путь — 600 м.

№ 18.

Если достаточно быстро вращать ведро с водой на веревке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведерка сила давления воды на дно не остается постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила ее давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведерка в м/с, L — длина веревки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина веревки равна 40 см? Ответ выразите в м/с.

№ 19.

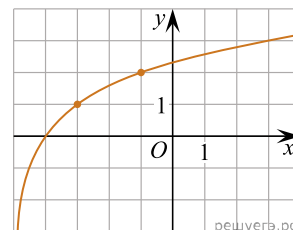
Васе надо решить 434 задачи. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вася решил 5 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 14 дней.

№ 20.

Заказ на 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает первый рабочий, если известно, что он за час изготавливает на 1 деталь больше второго?

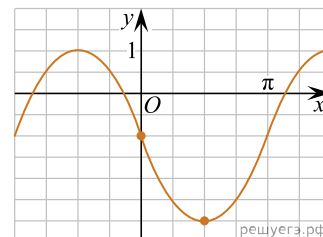
№ 21.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 4$.



№ 22.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$, где a и b — целые числа. Найдите $y\left(\frac{25\pi}{6}\right)$.



№ 23.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ на отрезке $[-4; -1]$.

№ 24.

Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0; 7]$.

№ 25.

а) Решите уравнение $2 \cos(2\pi + 2x) - 2 + \sqrt{8} \sin x = -\sqrt{6} + \sqrt{12} \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 26.

а) Решите уравнение $2 \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3} \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$.

№ 27.

Через вершину S конуса проведена плоскость, которая пересекает основание в точках A и B . Высота конуса SO равна $4\sqrt{3}$, дуга AB равна 90° , а хорда AB равна 8.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAB и плоскостью основания конуса равен 60° .

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

№ 28.

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

- Докажите, что $AA_1 = AC$.
- Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1 , если $AC = 6$, $BC = 3$.

№ 29.

Решите неравенство $\log_{\sqrt[3]{9x}} \sqrt{\frac{x^3}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3x^2}} \sqrt{27x} \leq 3$.

№ 30.

Решите неравенство $\frac{5^x}{5^x - 4} + \frac{5^x + 5}{5^x - 5} + \frac{22}{25^x - 9 \cdot 5^x + 20} \leq 0$.

№ 31.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в млн рублей)	S	$0,8S$	$0,6S$	$0,4S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

№ 32.

В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на сумму 800 тысяч рублей на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь с 2024 по 2027 год долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2028 по 2031 год долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тысяч рублей.

№ 33.

Вневписанная окружность равнобедренного треугольника касается его боковой стороны.

- а) Докажите, что радиус этой окружности равен высоте треугольника, опущенной на его основание.
б) Известно, что радиус этой окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности треугольника. В каком отношении точка касания вписанной окружности с боковой стороной треугольника делит эту сторону?
-

№ 34.

Дан прямоугольник $ABCD$. Известно, что $CD = 3AD$. Точка M — середина его стороны AD . На стороне CD отмечена точка N . Известно, что $CN = 2ND$. Точка K — середина отрезка CM .

- а) Докажите, что точки B , N и K лежат на одной прямой.
б) Найдите KN , если известно, что $AD = 4\sqrt{5}$.
-

№ 35.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(5x + |x - a^2| - 4|x + 1| - a^2)^2 + (a + 2)(5x + |x - a^2| - 4|x + 1| - a^2) + 1 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

№ 36.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{|x^2 + 6x + 6| + 1} \cdot \lg^{-1}(6a - a^2 - 4) = \sqrt{6a - a^2 - 4} \cdot \lg^{-1}(|x^2 + 6x + 6| + 1)$$

имеет не менее трех корней.

№ 37.

- а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n , что десятичная запись числа $n^2 + 2n$ оканчивается всеми цифрами числа n , записанными в том же порядке.
б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 3?
в) Найдите все такие четырёхзначные числа
-

№ 38.

Все члены последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 11 раз больше, либо в 11 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 2231.

- а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трех членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?
-

Номер	Задание	Ответ
1	676844	54
2	27765	61
3	27722	4,5
4	27719	0
5	77154	18
6	27089	4
7	320181	0,4
8	1024	0,25
9	663473	0,5
10	508792	0,63
11	26659	-4
12	26653	4
13	77410	42
14	26748	5
15	119975	60
16	317544	4
17	523991	30
18	27958	2
19	99581	57
20	26593	13
21	509060	11
22	676931	-2
23	628240	-9
24	77456	1

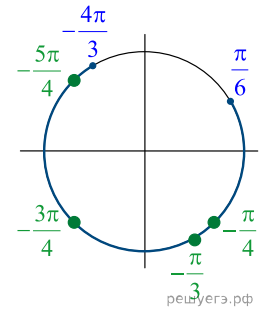
№ 25.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности (см.рис.). Подходят: $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}.$

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}.$

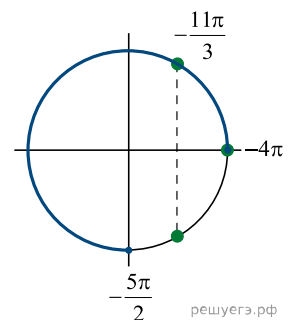
№ 26.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$2 \cos^2 x - 1 - 3 \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) На отрезке $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем -4π и $-\frac{11\pi}{3}.$

Ответ: а) $\left\{2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-4\pi; -\frac{11\pi}{3}.$

№ 27.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка M — середина хорды AB . Треугольник AOB прямоугольный и равнобедренный, значит, $AM = MB = OM = 4$. Угол SMO — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостью SAB и плоскостью основания конуса. В прямоугольном треугольнике SMO находим:

$$\operatorname{tg} \angle SMO = \frac{SO}{OM} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3},$$

то есть $\angle SMO = 60^\circ$.

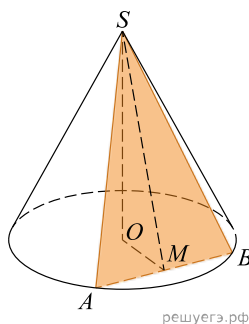


Рис. 1

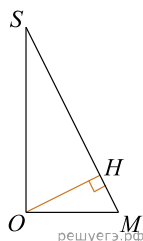


Рис. 2

б) Плоскости SMO и ASB перпендикулярны, поэтому искомое расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения равно высоте OH прямоугольного треугольника SMO . Так как $\angle SMO = 60^\circ$, то $OH = OM \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

№ 28.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

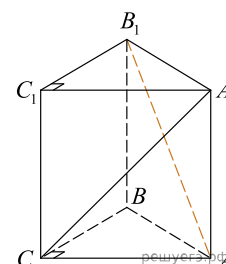
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Спроектируем наклонную AB_1 на плоскость CAA_1 , ее проекцией является прямая AC_1 . Так как $CA_1 \perp AB_1$, по теореме о трех перпендикулярах, следует, что $CA_1 \perp AC_1$. Таким образом, в прямоугольнике ACC_1A_1 диагонали перпендикулярны, поэтому он является квадратом, следовательно, $AA_1 = AC$.

б) Из п. а) следует, что $A_1C \perp AB_1C_1$ и пересекается с ней в середине AC_1 . Пусть M — середина AC_1 , тогда искомое расстояние равно расстоянию между проекциями прямых на плоскость AB_1C_1 , то есть расстоянию от точки M до прямой AB_1 . Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1 , проведённой к гипотенузе:

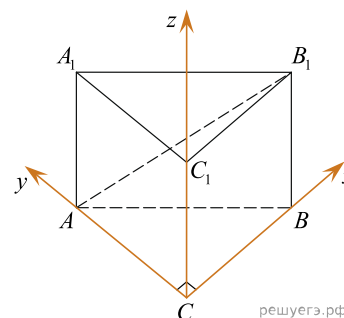
$$d(M, AB_1) = \frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \sqrt{2}.$$

Ответ: б) $\sqrt{2}$.



Приведем другой способ решения для п. а).

Если $CA_1 \perp AB_1$, то скалярное произведение векторов $\vec{CA_1} \cdot \vec{AB_1} = 0$. Введем систему координат с началом в точке C . Пусть $CA = C_1A_1 = a$, $CC_1 = AA_1 = BB_1 = b$, $CB = C_1B_1 = c$, тогда $C(0; 0; 0)$, $A(0; a; 0)$, $A_1(0; a; b)$, $B_1(c; 0; b)$, получим координаты векторов $\vec{CA_1}(0; a; b)$ и $\vec{AB_1}(c; -a; b)$. По условию $\vec{CA_1} \cdot \vec{AB_1} = 0$, а значит, что $c \cdot 0 + (-a) \cdot a + b \cdot b = 0$, это возможно, когда $a^2 = b^2$, то есть при $a = b$ или $a = -b$, однако, ввиду того, как введена система координат, a и b имеют одинаковые знаки, значит, $a = b$, тогда $CA = AA_1$.



№ 29.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Перейдём к основанию 3 и воспользуемся свойствами логарифмов:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt[3]{9x}} \sqrt{\frac{x^3}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3x^2}} \sqrt{27x} &\leq 3 \Leftrightarrow \frac{\log_3 \sqrt{\frac{x^3}{3}}}{\log_3 \sqrt[3]{9x}} + \frac{\log_3 \sqrt{27x}}{\log_3 \sqrt[3]{3x^2}} \leq 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3(3\log_3 x - 1)}{2(\log_3 x + 2)} + \frac{3(\log_3 x + 3)}{2(2\log_3 x + 1)} \leq 3. \log_{\sqrt[3]{9x}} \sqrt{\frac{x^3}{3}} + \log_{\sqrt[3]{3x^2}} \sqrt{27x} \leq 3 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3 \sqrt{\frac{x^3}{3}}}{\log_3 \sqrt[3]{9x}} + \frac{\log_3 \sqrt{27x}}{\log_3 \sqrt[3]{3x^2}} \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3\log_3 x - 1)}{2(\log_3 x + 2)} + \frac{3(\log_3 x + 3)}{2(2\log_3 x + 1)} \leq 3.$$

Пусть $t = \log_3 x$, тогда

$$\frac{3(3t-1)}{2(t+2)} + \frac{3(t+3)}{2(2t+1)} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{3t-1}{t+2} + \frac{t+3}{2t+1} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3t^2-4t+1}{(t+2)(2t+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3(3t-1)}{2(t+2)} + \frac{3(t+3)}{2(2t+1)} \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3t-1}{t+2} + \frac{t+3}{2t+1} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3t^2-4t+1}{(t+2)(2t+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(t-1)(3t-1)}{(t+2)(2t+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < t < -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} -2 < \log_3 x < -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3} \leq \log_3 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-2} < x < 3^{-\frac{1}{2}}, \\ 3^{\frac{1}{3}} \leq x \leq 3^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{9} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sqrt[3]{3} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{9}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup [\sqrt[3]{3}; 3]$.

№ 30.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначим 5^x за t . Получим:

$$\frac{t}{t-4} + \frac{t+5}{t-5} + \frac{22}{t^2-9t+20} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t(t-5) + (t+5)(t-4) + 22}{(t-4)(t-5)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^2-4t+2}{(t-4)(t-5)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{(t-4)(t-5)} \leq 0 \begin{cases} t=1, \\ 4 < t < 5. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной: $5^x = 1$, или $4 < 5^x < 5$, откуда $x = 0$ или $\log_5 4 < x < 1$.

Ответ: $\{0\} \cup (\log_5 4; 1)$.

№ 31.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу:

Год	Долг в январе после начисления процен- тов	Выплата	Долг в июле до начисления процен- тов
2020			S
2021	$1,25S$	$0,45S$	$0,8S$
2022	S	$0,4S$	$0,6S$
2023	$0,75S$	$0,35S$	$0,4S$
2024	$0,5S$	$0,5S$	0

Сумма всех выплат должна быть менее 50 млн рублей:

$$1,7S < 50 \Leftrightarrow S < \frac{500}{17} \Leftrightarrow S < 29\frac{7}{17}.$$

Наибольшее целое S , удовлетворяющее неравенству, равно 29.

Ответ: 29.

№ 32.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Схема возврата долга дифференцированная. Основной долг заемщика перед четвертым, пятым и восьмым платежными годами составит: 500тыс.руб., 400тыс.руб. и 100тыс.руб. соответственно. Переплата заемщика за период первых 4 платежных года найдем как сумму первых 4 членов арифметической прогрессии:

$$S_1 = \frac{800 \cdot 0,01r + 500 \cdot 0,01r}{2} \cdot 4 = 13r \cdot 2 = 26r \text{ (тыс. руб.)}.$$

Аналогичная сумма за последние 4 платежных года равна

$$S_2 = \frac{0,15 \cdot 400 + 0,15 \cdot 100}{2} \cdot 4 = (60 + 15) \cdot 2 = 150 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Общая сумма выплат заемщика в тыс. рублях составит $26r + 150 + 800$, что равно 1444. Решим уравнение:

$$26r = 1444 - 950 \Leftrightarrow 26r = 494 \Leftrightarrow r = 19.$$

Ответ: 19.

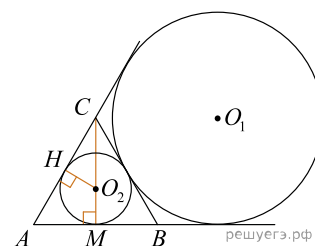
№ 33.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть b — боковая сторона треугольника, c — его основание, h — высота, опущенная на основание треугольника.

Радиус вневписанной окружности вычисляется по формуле $R = \frac{S}{p-a}$, где p — полупериметр треугольника, a — сторона, которой касается окружность. Таким образом,

$$R = \frac{\frac{hc}{2}}{\frac{c}{2} + b - b} = h.$$



б) Пусть O_2 — центр вписанной окружности. Проведем радиус в точку касания H . Треугольники AMC и CHO_2 подобны по двум углам, поэтому $\frac{CA}{CO_2} = \frac{CM}{CH}$.

Из равенство $R = h$ находим, что $r = \frac{1}{4}h$, тогда $CO_2 = 3r$. Найдем CH по теореме Пифагора, получим, что $CH = 2\sqrt{2}r$. Тогда

$$CA = \frac{CM \cdot CO_2}{CH} = \frac{4r \cdot 3r}{2\sqrt{2}r} = 3\sqrt{2}r,$$

откуда получаем:

$$\frac{CH}{HA} = \frac{2\sqrt{2}r}{CA - CH} = \frac{2}{1}.$$

Ответ: б) 2 : 1.

№ 34.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть прямые BN и AD пересекаются в точке P . Углы CBP и NPD равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AP и секущей BP . Значит, прямоугольные треугольники BCN и PDN подобны по острому углу, откуда следуют соотношения

$$\frac{BC}{PD} = \frac{CN}{ND} = 2.$$

Следовательно, $BC = 2PD$. В то же время $BC = 2MD$, и потому $MD = PD$. Значит, прямая CD — медиана треугольника MCP , а N — точка пересечения его медиан, поскольку $\frac{CN}{ND} = \frac{2}{1}$. Таким образом, прямая PN — также медиана треугольника MCP , поэтому она пересекает сторону CM в ее середине — точке K . Следовательно, точка K лежит на прямой PN , а значит, и на прямой BN .

б) Из условия получаем, что $CD = 12\sqrt{5}$, $ND = 4\sqrt{5}$. По теореме Пифагора в треугольнике PDN :

$$NP = \sqrt{ND^2 + DP^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{80 + 20} = 10.$$

По свойству точки пересечения медиан $\frac{NP}{KN} = \frac{2}{1}$, откуда $NK = 5$.

Ответ: б) 5.

Приведем другое решение.

а) Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Пусть $AD = 2a$, тогда $CD = 6a$. Найдем координаты точек B и N , находим уравнение прямой BN :

$$M(0; 0),$$

$$N(2a; 0),$$

$$C(6a; 0),$$

$$K\left(3a; \frac{a}{2}\right),$$

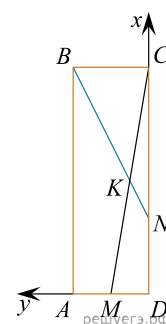
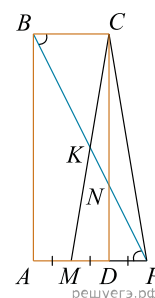
$$B(6a; 2a).$$

Уравнение прямой BN имеет вид $y = kx + b$. Подставляя координаты точек, получаем:

$$\begin{cases} 2a = 6a \cdot k + b, \\ 0 = 2a \cdot k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 6a \cdot k - 2a \cdot k, \\ b = -2a \cdot k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2}, \\ b = -a. \end{cases}$$

Значит, уравнение прямой BN есть $y = \frac{1}{2}x - a$. Подставим в него координаты точки K : $\frac{a}{2} = \frac{3}{2}a - a$, откуда $0 = 0$. Таким образом, точка K принадлежит прямой BN .

б) Из условия $2a = 4\sqrt{5}$, то есть $a = 2\sqrt{5}$. Следовательно, $K(6\sqrt{5}; \sqrt{5})$, $N(4\sqrt{5}; 0)$ и $\vec{KN} = (-2\sqrt{5}; -\sqrt{5})$. Длина вектора $\vec{KN}$ равна $\sqrt{20 + 5} = 5$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

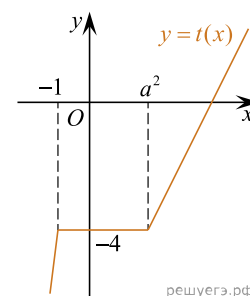
Решение. Пусть $t(x) = 5x + |x - a^2| - 4|x + 1| - a^2$, тогда $t^2 + (a + 2)t + 1 = 0$. Раскроем модули:

$$t(x) = \begin{cases} 8x + 4, & \text{при } x < -1, \\ -4, & \text{при } -1 \leq x \leq a^2, \\ 2x - 4 - 2a^2, & \text{при } x > a^2. \end{cases}$$

При любом значении x из отрезка $[-1; a^2]$ значение функции $y = t(x)$ равно $y = t(-1) = t(a^2) = -4$. На $(-\infty; -1) \cup (a^2; +\infty)$ функция $y = t(x)$ — неограниченно возрастает (см. рис.) и принимает любое значение, кроме $y = -4$, причем каждое ровно один раз.

Поскольку исходное уравнение должно иметь ровно два различных корня, квадратное уравнение $t^2 + (a + 2)t + 1 = 0$ должно иметь два решения, каждое из которых отлично от -4 . Тогда:

$$\begin{cases} (a + 2)^2 - 4 > 0, \\ 16 - 4(a + 2) + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -4, \\ a > 0, \\ a \neq \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -4, \\ 0 < a < \frac{9}{4}, \\ a > \frac{9}{4}. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(0; \frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

№ 36.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Определим знаки каждого из четырех множителей на области определения:

$$|x^2 + 6x + 6| + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2 + 6x + 6| + 1} > 1,$$

аналогично $\lg(|x^2 + 6x + 6| + 1) \geq 0$, а поскольку должен существовать $\lg^{-1}(|x^2 + 6x + 6| + 1)$, оба этих логарифма положительны.

Поскольку три из четырех множителей больше нуля, то и четвертый больше нуля:

$$\lg^{-1}(6a - a^2 - 4) > 0 \Leftrightarrow 6a - a^2 - 4 > 1.$$

Кроме того, $6a - a^2 - 4 = 5 - (a - 3)^2 \leq 5$. С учетом всех ограничений находим:

$$\begin{cases} 1 < 6a - a^2 - 4 \leq 5, \\ x^2 + 6x + 6 \neq 0, \\ \sqrt{|x^2 + 6x + 6| + 1} \cdot \lg(|x^2 + 6x + 6| + 1) = \sqrt{6a - a^2 - 4} \cdot \lg(6a - a^2 - 4). \end{cases}$$

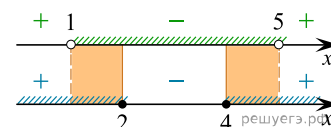
Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{t} \cdot \lg t$ при $t > 1$. Поскольку оба множителя положительны и возрастают, то и $f(t) > 0$ возрастает. Поэтому если $f(x) = f(y)$ при $x > 1$ и $y > 1$, то $x = y$. Значит,

$$\begin{cases} 1 < 6a - a^2 - 4 \leq 5, \\ x^2 + 6x + 6 \neq 0, \\ |x^2 + 6x + 6| + 1 = 6a - a^2 - 4, \end{cases}$$

полученная система должна иметь не менее трех решений.

Функция $g(x) = x^2 + 6x + 6 = (x + 3)^2 - 3$ квадратичная с положительным старшим коэффициентом, поэтому принимает все значения от $y_{\min} = -3$ включая до $+\infty$, причем значения от $(-3; +\infty)$ по два раза. Значит, $|g(x)| + 1$ при $g(x) \neq 0$ принимает все значения из интервала $(1; 4)$ по четыре раза, значение 4 — трижды, значения из луча $(4; +\infty)$ — по два раза. Таким образом, подойдут все такие a , что $1 < 6a - a^2 - 4 \leq 4$, откуда находим:

$$\begin{cases} a^2 - 6a + 5 < 0, \\ a^2 - 6a + 8 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 1)(a - 5) < 0, \\ (a - 4)(a - 2) \geq 0. \end{cases}$$



Ответ: $a \in (1; 2) \cup [4; 5)$.

№ 37.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а, б и в	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а и б, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах а и в	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте в, пункты а и б не решены	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Например, число 9.

б) Предположим, что $n = 10k + 3$. Тогда

$$n^2 + 2n = 100k^2 + 60k + 9 + 20k + 6 = 10l + 15,$$

то есть десятичная запись числа $n^2 + 2n$ оканчивается цифрой 5. Значит, такое невозможно.

в) Запишем условие задачи в таком виде: $n^2 + 2n = n + N \cdot 10000$, преобразуем:

$$n^2 + n = N \cdot 10000, \text{ то есть } n \cdot (n + 1) = 2^4 \cdot 5^4 \cdot N.$$

Заметим, что n и $n+1$ не могут одновременно делиться на 2 и не могут одновременно делиться на 5. Значит, один из множителей делится на 5^4 и один из множителей делится на 2^4 . Эти два множителя могут совпадать только в том случае, если число $n + 1$ делится на 10000, а число n четырёхзначное, то есть $n = 9999$.

Если $n \neq 9999$, мы должны подобрать два числа, одно из которых делится на 16, а другое — на 625 и одно из которых больше другого на 1.

Переберём нечётные четырёхзначные числа, кратные числу 625: 1875, 3125, 4375, 5625, 6875, 8125, 9375. Из них только число 9375 имеет вид $16k - 1$, а чисел вида $16k + 1$ среди них нет.

Значит, искомое число может равняться 9375 или 9999.

Ответ: а) 9; б) нет; в) 9375; 9999.

№ 38.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пункта а; — обоснованное решение пункта б; — оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность найденной оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Очевидно, оба числа имеют одинаковую четность, поэтому их сумма четна и не может быть равна 2231.

б) Да, это возможно: $1067 + 97 + 1067 = 2231$.

в) Сумма любых двух соседних членов последовательности не меньше 12. Поскольку $2232 = 12 \cdot 186$, в последовательности меньше $186 \cdot 2 = 372$ членов. Примером последовательности, состоящей из 371 члена может служить

$11, 1, 11, 1, 11, \dots, 1, 11$.

185 пар