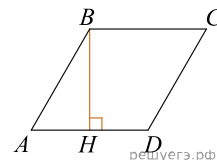


Вариант 123

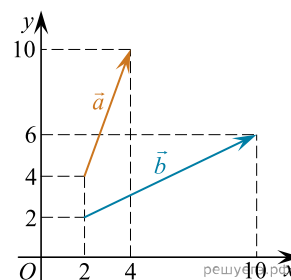
№ 1.

Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60° .



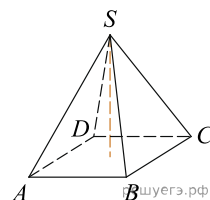
№ 2.

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



№ 3.

Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6, а основание — прямоугольник со сторонами 3 и 4.



№ 4.

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

№ 5.

Чтобы забросить шесть мячей в корзину на тренировке, баскетболисту потребовалось 10 бросков. Считая, что вероятность попадания в корзину при каждом броске одна и та же, найдите вероятность того, что при первых четырех бросках баскетболист попал в корзину не более одного раза. Результат округлите до тысячных.

№ 6.

Найдите корень уравнения $\frac{9}{x^2 - 16} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

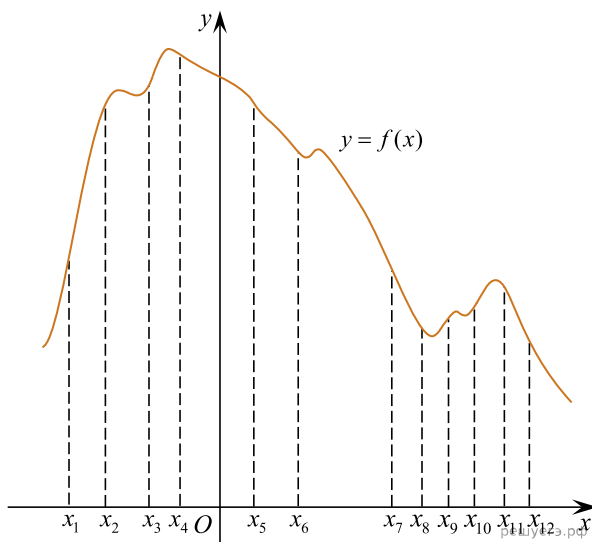
№ 7.

Найдите значение выражения:

$$\frac{\log_5 63}{\log_5 3} - \log_3(7\sqrt{3}).$$

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



№ 9.

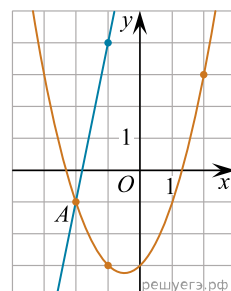
На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A = \rho g l^3$, где l — длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше, чем 78400 Н ? Ответ выразите в метрах.

№ 10.

Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 74 км/ч , а вторую половину времени — со скоростью 66 км/ч . Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч .

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = 5x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 8x + 8)e^{2-x}$ на отрезке $[1; 7]$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $(\sin 2x - \sin x)(\sqrt{2} + \sqrt{-2\operatorname{ctg} x}) = 0$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$.

№ 14.

Диаметр основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость α пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Пусть M и N — середины этих хорд, P — точка пересечения прямой MN с осью цилиндра.

- а) Докажите, что расстояния от точки P до плоскостей основания цилиндра относятся как 5 : 12.
б) Найдите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра.

№ 15.

Решите неравенство $\frac{2 - (x - 6)^{-1}}{5(x - 6)^{-1} - 1} \leq -0,2$.

№ 16.

В июне 2025 года Анна Михайловна планирует взять кредит в банке на 3 года. Условия его возврата таковы:
— в январе каждого года долг увеличивается на 10% от суммы долга на конец предыдущего года;
— в период с февраля по июнь каждого из 2026 и 2027 годов необходимо выплатить часть долга, причём платёж 2027 года в 1,5 раза больше платежа предыдущего года;
— в период с февраля по июнь 2028 года выплачивается оставшаяся сумма по кредиту, равная 2 679 600 рублей.
Найдите сумму кредита, если сумма всех платежей составит 9 179 600 рублей.

№ 17.

Дан угол величиной 120° с вершиной C . Вне угла на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC = \sqrt{3}$. С центром в точке O построена окружность радиуса 3, пересекающая стороны угла в точках A и B .

- а) Докажите, что $OC = BC = CA$.
б) Найдите площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 3|x + a| + |x^2 - x - 2|$$

меньше 2.

№ 19.

Дано натуральное число n . За один ход разрешается либо прибавить к числу его наибольший делитель, не равный самому числу ($d_{\max} < n$), либо вычесть из числа его наименьший делитель, больший 1 ($d_{\min} > 1$).

- а) Можно ли за несколько таких ходов из числа 4 получить число 15?
б) Можно ли за несколько таких ходов из числа 10 получить число 13?
в) Какое наименьшее количество ходов потребуется, чтобы из числа 2 получить число 60?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27817	1,5
2	27740	40
3	27176	24
4	282853	0,14
5	663478	0,167
6	77366	5
7	676850	1,5
8	317540	7
9	27967	2
10	99603	70
11	509149	6
12	77480	-4

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

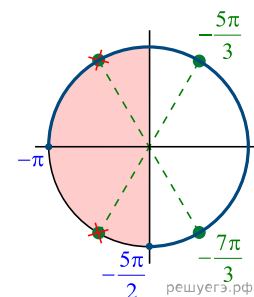
Решение. а) Последовательно получаем:

$$(\operatorname{tg}^2 x - 3)\sqrt{11 \cos x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = 3, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3}, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, \\ \cos x > 0, \end{cases} k \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $-\frac{7\pi}{3}$ и $-\frac{5\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k, -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка M — середина хорды KL длиной 10, принадлежащей нижнему основанию, центр которого — точка O . Пусть точка N — середина хорды QR верхнего основания с центром O_1 . Обозначим диаметр буквой D , по условию $D=26$. Рассмотрим равнобедренный треугольник OKL , в котором OM — медиана, биссектриса и высота. Находим:

$$OK = \frac{D}{2} = 13, \quad KM = \frac{KL}{2} = 5, \quad MO = \sqrt{OK^2 - KM^2} = 12.$$

Аналогично $NO_1 = 5$.

Рассмотрим плоскость OMP , в ней отрезки MO и ON_1 параллельны, следовательно, треугольники PMO и PNO_1 подобны. Таким образом,

$$\frac{PO_1}{PO} = \frac{NO_1}{MO} = \frac{5}{12}.$$

б) Прямой, по которой плоскость α пересекает плоскость основания с центром O , является прямая KL . Отрезки MO и KL перпендикулярны, поэтому по теореме о трех перпендикулярах отрезок PM перпендикулярен отрезку KL . Таким образом, угол PMO — линейный угол искомого угла. Заметим, что высота прямого цилиндра равна его образующей, значит,

$$\frac{PO}{OO_1} = \frac{PO}{PO + PO_1} = \frac{12}{17},$$

то есть

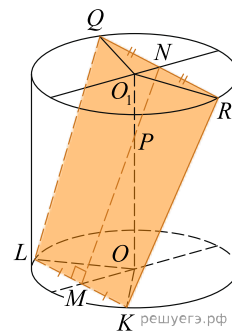
$$PO = \frac{12}{17} OO_1 = \frac{12 \cdot 21}{17},$$

следовательно, $\operatorname{tg} \angle PMO = \frac{PO}{MO} = \frac{21}{17}$.

Ответ: б) $\frac{21}{17}$.

Примечание.

В учебнике А.В.Погорелова, в отличие от учебников Л.С.Атанасяна и Е.В.Потоскуева — Л.И.Звавича осью цилиндра называется не отрезок, соединяющий центры его оснований, а прямая, проходящая через эти центры. В этом случае точка P может располагаться вне цилиндра, и тогда ответ в пункте б) другой: $\operatorname{tg} \angle PMO = 3$. Предоставляем читателю возможность самостоятельно решить задачу для этого случая.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Сделаем замену $y = \frac{1}{x-6}$. Получим

$$\frac{2-y}{5y-1} \leq -0,2 \Leftrightarrow \frac{1,8}{5y-1} \leq 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x-6} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{11-x}{x-6} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6, \\ x > 11. \end{cases}$



Ответ: $(-\infty; 6) \cup (11; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть сумма кредита равна S руб., выплата в 2026 году равна $2x$ руб. Заполним таблицу:

Год	Долг на январь, руб.	Выплата (фев - июн), руб.	Долг на декабрь, руб.
2025			S
2026	$1,1S$	$2x$	$1,1S - 2x$
2027	$1,1 \cdot (1,1S - 2x)$	$2x \cdot 1,5 = 3x$	$1,1 \cdot (1,1S - 2x) - 3x$
2028	$1,1 \cdot (1,1 \cdot (1,1S - 2x) - 3x)$	2 679 600	0

По условию сумма всех платежей составит 9 179 600 рублей:

$$2x + 3x + 2679600 = 9179600 \Leftrightarrow x = 1300000.$$

Выразим величину кредита из уравнения:

$$\begin{aligned}
& 1,1 \cdot (1,1 \cdot (1,1S - 2x) - 3x) - 2679600 = 0 \Leftrightarrow 1,331S - 5,72x = 2679600 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,331S = 2679600 + 5,72x \Leftrightarrow S = \frac{2679600 + 5,72x}{1,331}. \quad 1,1 \cdot (1,1 \cdot (1,1S - 2x) - 3x) - 2679600 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,331S - 5,72x = 2679600 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,331S = 2679600 + 5,72x \Leftrightarrow S = \frac{2679600 + 5,72x}{1,331}. \quad 1,1 \cdot (1,1 \cdot (1,1S - 2x) - 3x) - 2679600 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,331S - 5,72x = 2679600 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1,331S = 2679600 + 5,72x \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow S = \frac{2679600 + 5,72x}{1,331}.
\end{aligned}$$

Подставим значение x , найденное ранее:

$$S = \frac{2679600 + 5,72 \cdot 1300000}{1,331} = 7600000 \text{ руб.}$$

Ответ: 7 600 000 рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что

$$\angle ACO = \angle BCO = \frac{(360^\circ - 120^\circ)}{2} = 120^\circ.$$

Пусть $AC = x$. По теореме косинусов для треугольника ACO получим, что $9 = x^2 + 3 + x\sqrt{3}$. Положительный корень этого уравнения равен $\sqrt{3}$. Поэтому $AC = CO = \sqrt{3}$. Аналогично $CB = CO$. Что и требовалось доказать.

б) Заметим, что треугольники ACO и BCO равнобедренные, поэтому $\angle AOB = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. Радиус окружности равен 3, поэтому площадь сектора AOB равна

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{3\pi}{2}.$$

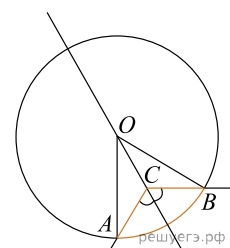
Найдем площади треугольников ACO и BCO :

$$S_{ACO} = S_{BCO} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Тогда площадь криволинейной фигуры ABC равна

$$\frac{3\pi}{2} - 2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3(\pi - \sqrt{3})}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{3(\pi - \sqrt{3})}{2}$.



№ 18.

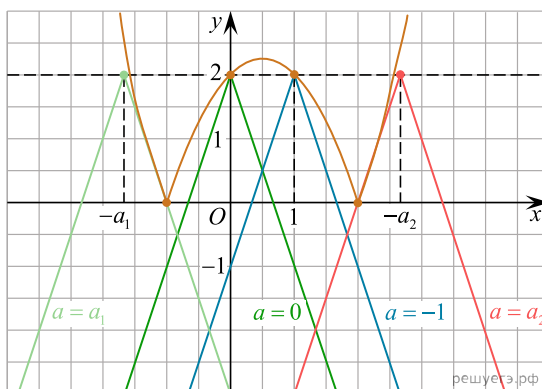
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но некоторые граничные точки включены/исключены неверно.	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a .	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Заданная функция непрерывна и на бесконечностях стремится к плюс бесконечности. Поэтому при любом значении параметра она достигает своего наименьшего значения. Тогда задачу можно переформулировать так: для того чтобы наименьшее значение функции $f(x) = 3|x+a| + |x^2 - x - 2|$ было меньше двух, необходимо и достаточно, чтобы неравенство $f(x) < 2$ имело решение. Запишем его в следующем виде:

$$|x^2 - x - 2| < 2 - 3|x+a|.$$

Рассмотрим функции $h(x) = |x^2 - x - 2|$ и $g(x) = 2 - 3|x+a|$, тогда $h(x) < g(x)$. График левой части неравенства — парабола с нулями $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ и отражённой отрицательной частью. График правой части — перевёрнутая «галочка» модуля поднятая на 2 единицы вверх с вершиной в точке $(-a; 2)$, которая в зависимости от a перемещается вдоль прямой $y = 2$. Построим их графики.

Нетрудно заметить, что неравенство имеет решение, когда $a \in (a_2; -1) \cup (0; a_1)$, где a_1 и a_2 — случаи касания «галочки» и параболы $y = x^2 - x - 2$.



Найдём a_1 . Уравнение $x^2 - x - 2 = 2 - 3(x+a_1) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 3a_1 - 4 = 0$ должно иметь единственный корень. Найдём дискриминант этого уравнения и выразим a_1 : $D = 4 - 4(3a_1 - 4) = 20 - 12a_1 = 0$, откуда $a_1 = \frac{5}{3}$.

Аналогично для a_2 уравнение $x^2 - x - 2 = 2 + 3(x+a_2) \Leftrightarrow x^2 - 4x - (3a_2 + 4) = 0$ должно иметь один корень. Найдём дискриминант этого уравнения и выразим a_2 : $D = 16 + 4(3a_2 + 4) = 32 + 12a_2 = 0$, откуда $a_2 = -\frac{8}{3}$.

Таким образом, получаем ответ $a \in \left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3

Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, например,

$$4 + 2 = 6,$$

$$6 + 3 = 9,$$

$$9 + 3 = 12,$$

$$12 - 2 = 10,$$

$$10 + 5 = 15.$$

б) Пусть дано составное число, наибольший делитель которого равен a , а наименьший — b , кроме делителей a и b . Следовательно, число равно ab , а получается из него либо как $ab + a = a(b + 1)$, либо как $ab - b = b(a - 1)$. В первом случае результат — составное число. Во втором случае результат может быть простым, но только если $a = 2$, но тогда $b(a - 1) \leq 2 \cdot 1 = 2 < 13$.

Если же выполнять действия с простым числом p , то из него получается либо $p + 1$, либо $p - 1$. Таким образом, получить число 13 нельзя ни из числа 10, ни из какого-либо другого.

в) Рассмотрим цепочку превращений

$$2 + 1 = 3,$$

$$3 + 1 = 4,$$

$$4 + 2 = 6,$$

$$6 + 3 = 9,$$

$$9 + 3 = 12,$$

$$12 + 6 = 18,$$

$$18 - 3 = 15,$$

$$15 + 5 = 20,$$

$$20 + 10 = 30,$$

$$30 + 15 = 45,$$

$$45 + 15 = 60.$$

В ней 11 действий.

Допустим, можно справиться за 10 или менее действий. Если на каком-то шаге получается число, которое уже встречалось, то выписывать его не будем, поскольку получить его можно было раньше. Следовательно, 5 начальных действий определены однозначно:

$$2 + 1 = 3,$$

$$3 + 1 = 4,$$

$$4 + 2 = 6,$$

$$6 + 3 = 9,$$

$$9 + 3 = 12.$$

Осталось 5 или менее действий. При этом каждое действие увеличивает число максимум в

$$\frac{a(b+1)}{ab} = \frac{b+1}{b} = 1 + \frac{1}{b} \leq 1 + \frac{1}{2} = 1,5 \text{ раза.}$$

Значит, за 2 действия число может увеличиться максимум в $1,5^2$ раз, за три — максимум в $1,5^3$ раз и так далее. Следовательно, на 9 действиях нужно иметь число, не меньшее 40, на восьмом — не меньшее $40 \cdot \frac{2}{3} > 26$, то есть не меньшее 27, на седьмом — не меньшее $27 \cdot \frac{2}{3} = 18$, на шестом — не меньшее $18 \cdot \frac{2}{3} = 12$. Таким образом, число 12, полученное на 5 действиях, нельзя уменьшать. Продолжаем цепочку:

$$12 + 6 = 18,$$

$$18 + 9 = 27.$$

Число 27 также уже нельзя уменьшать, поэтому

$$27 + 9 = 36,$$

$$36 + 18 = 54.$$

Из числа 54 получить 60 за одно действие нельзя, поэтому для получения из числа 2 числа 60 потребуется минимум 11 действий.

Ответ: а) да; б) нет; в) 11.
