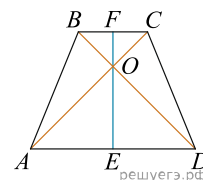


Вариант 125

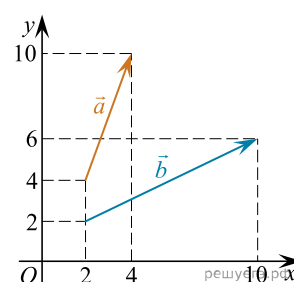
№ 1.

В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.



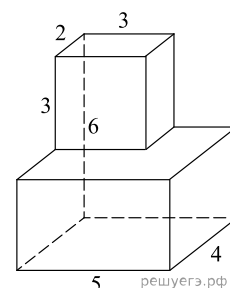
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

№ 5.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру кофе останется в обоих автоматах.

№ 6.

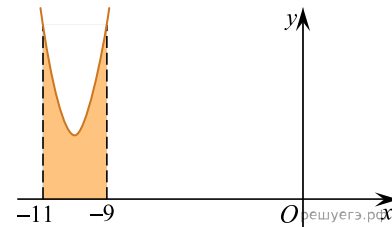
Найдите корень уравнения $\sqrt{57 - 7x} = 6$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(5ax - (-3xa)) : (4ax)$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



№ 9.

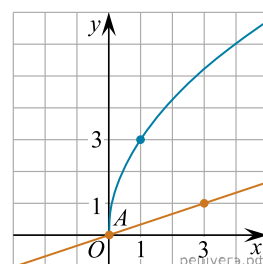
Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 3$ моль воздуха объемом $V_1 = 8$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 5,75$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

№ 10.

Один мастер может выполнить заказ за 12 часов, а другой — за 6 часов. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

№ 11.

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 4 \operatorname{tg} x - 4x - \pi + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $2 \sin x \cos^2 x - \sqrt{2} \sin 2x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В треугольной пирамиде $PABC$ с основанием ABC известно, что $AB = 13$, $PB = 15$, $\cos \angle PBA = \frac{48}{65}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C . Прямые PA и BC перпендикулярны.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - б) Найдите объем пирамиды $PABC$.
-

№ 15.

Решите неравенство $\log_x(\log_9(3^x - 9)) < 1$.

№ 16.

В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области рабочие объединены в две бригады, одна из которых добывает алюминий, а другая — никель, причем для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую суммарную массу металлов можно добыть в двух областях за сутки?

№ 17.

В треугольнике ABC высота CH и медиана CK делят угол ACB на три равных угла. Площадь треугольника ABC равна $1,5 + \sqrt{3}$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - б) Найдите радиус вписанной в треугольник ABC окружности.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (3\sqrt{x|x|} + |y| - 3) \cdot (|x| + 3|y| - 9) = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№ 19.

В последовательности 19752... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предыдущих четырёх цифр. Встретится ли в этой последовательности:

- а) набор цифр 1234; 3269;
 - б) вторично набор 1975;
 - в) набор 8197?
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27844	12
2	27736	20
3	25881	124
4	282857	0,92
5	510117	0,65
6	526005	3
7	512394	2
8	323079	6
9	27996	2
10	99614	4
11	661823	81
12	26705	1

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Обозначим $t = \sin x$, тогда

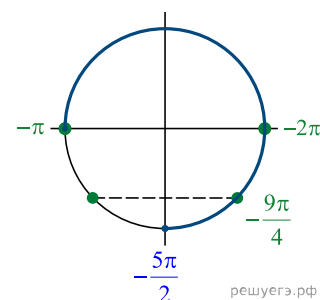
$$2t^3 + t + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(1 - t^2) \Leftrightarrow 2t^3 + 2\sqrt{2}t^2 + t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0 \Leftrightarrow t(\sqrt{2}t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases}$$

Чтобы отобрать корни, лежащие на заданном отрезке, воспользуемся тригонометрической окружностью (см.рис.). Получим корни $-\frac{9\pi}{4}$, -2π , $-\pi$.



Ответ: а) $\left\{ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$, -2π , $-\pi$.

Примечание.

Мы решили уравнение $2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = 0$, записав левую часть в виде полного квадрата $(\sqrt{2}t + 1)^2$. Можно было найти дискриминант $D = (2\sqrt{2})^2 - 8 = 0$ и прийти к выводу, что уравнение имеет единственный корень

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

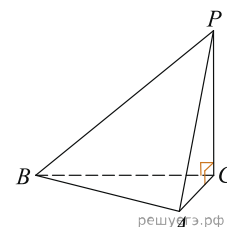
Решение. а) Прямая BC перпендикулярна плоскости APC , поскольку она перпендикулярна прямым PA и PC . Значит, прямые AC и BC перпендикулярны.

б) По теореме косинусов $PA = \sqrt{PB^2 + BA^2 - 2PB \cdot BA \cdot \cos \angle PBA} = \sqrt{106}$.

По теореме Пифагора:

$$AC^2 + BC^2 = 169, AC^2 + PC^2 = 106, BC^2 + PC^2 = 225, PC^2 = 81, BC^2 = 144, AC^2 = 25; PC = 9, BC = 12, AC = 5.$$

$$\text{Значит, объем пирамиды равен } \frac{1}{3} PC \cdot \frac{AC \cdot BC}{2} = 90.$$



Ответ: б) 90.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Поскольку $3^x > 9$, сразу имеем $x > 2$. Поэтому $0 < \log_9(3^x - 9) < x$. Это значит, что $1 < 3^x - 9 < 9^x$. Для первого неравенства имеем $x > \log_3 10$. Второе неравенство выполнено всегда, поскольку $t^2 - t + 9 > 0$ при всех t из-за отрицательности дискриминанта (замена $3^x = t$). Таким образом, $(\log_3 10; +\infty)$.

Ответ: $(\log_3 10; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, необходимо, чтобы в каждой области независимо от другой было добыто наибольшее количество металла. Поэтому все рабочие первой области должны быть направлены на добычу никеля, который они добывают втрое более эффективно, чем алюминий. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0,3 = 240$ кг никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают y рабочих, а никель — $160 - y$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5y}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160 - y)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции

$$f(y) = \sqrt{5y} + \sqrt{800 - 5y}$$

для неотрицательных целых y , не больших 160. Имеем:

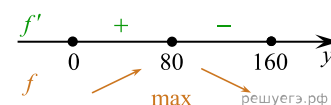
$$f'(y) = \frac{5}{2\sqrt{5y}} - \frac{5}{2\sqrt{800 - 5y}} = \frac{5}{2} \frac{\sqrt{800 - 5y} - \sqrt{5y}}{\sqrt{5y} \cdot \sqrt{800 - 5y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800 - 5y} = \sqrt{5y} \Leftrightarrow_{y \geq 0} 800 - 5y = 5y \Leftrightarrow y = 80.$$

При y меньших 80 производная положительна, а при y больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{\max} = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Таким образом, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 280 кг металла.



Ответ: 280 кг.

Примечание.

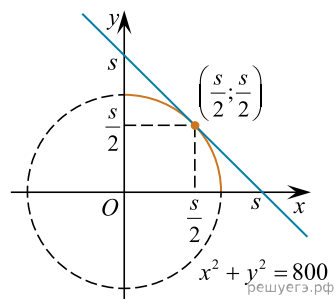
Можно было обойтись без производной. Напомним, что наибольшее значение функции $y(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$, на отрезке $[a; b]$ достигается в точке $\frac{a+b}{2}$ и равно $\sqrt{2(b-a)}$. Доказательство можно получить, например, возведением в квадрат.

В нашем случае $f(x) = \sqrt{5x} + \sqrt{800 - 5x}$, $a = 0$, $b = 800$, поэтому искомое наибольшее значение $f_{\max} = \sqrt{1600} = 40$, достигается в точке, где $5x = 400$ то есть при $x = 80$.

Приведём геометрическое решение.

Пусть во второй области на добычу алюминия будет отведено x^2 человеко-часов, а на добычу никеля — y^2 человеко-часов. Всего рабочих 160, работая по 5 часов, они вырабатывают 800 человеко-часов в сутки, поэтому $x^2 + y^2 = 800$. Для таких значений переменных требуется определить наибольшее значение количества добытого металла $s = x + y$. Таким образом, необходимо определить наибольшее значение параметра s , при котором прямая, задаваемая уравнением $y = s - x$, будет иметь с окружностью $x^2 + y^2 = 800$ общие точки, лежащие в первой координатной четверти.

Из рисунка видно, что точка касания является серединой гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника. Координаты точки касания $(0,5s; 0,5s)$ должны удовлетворять уравнению окружности. Тогда $0,25s^2 + 0,25s^2 = 800$, откуда $s = 40$. при $x = y = 20$.



№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть $АН = НМ = x$, $ВМ = 2x$, $СН = y$. По свойству биссектрисы $\frac{BC}{CH} = \frac{BM}{MH} = \frac{2}{1}$, то есть $BC = 2y$. Из равенства $CH^2 + BH^2 = BC^2$ получаем:

$$y^2 + (3x)^2 = (2y)^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x.$$

Тогда

$$AC^2 = x^2 + y^2 = 4x^2,$$

$$BC^2 = (2\sqrt{3}x)^2 = 12x^2.$$

Значит,

$$AC^2 + CB^2 = 4x^2 + 12x^2 = 16x^2 = (4x)^2 = AB^2,$$

откуда по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle ACB = 90^\circ$.

б) Из пункта а) следует, что

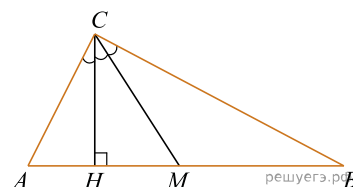
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2\sqrt{3}x = 2\sqrt{3}x^2 = 1,5 + \sqrt{3} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда $x^2 = \frac{3+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$. Найдем полупериметр треугольника:

$$p = \frac{AC + CB + AC}{2} = \frac{2x + 4x + 2\sqrt{3}x}{2} = 3x + \sqrt{3}x.$$

По формуле $S = pr$ найдем

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{3x + \sqrt{3}x} = \frac{2x}{1 + \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}}}{1 + \sqrt{3}} =$$



$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r = \frac{S}{p} = \frac{2\sqrt{3}x^2}{3x+\sqrt{3}x} = \frac{2x}{1+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Система определена при $x|x| \geq 0$, то есть при $x \geq 0$. Значит, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} (3x + |y| - 3)(x + 3|y| - 9) = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 25, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы, то и пара чисел $(x_0; -y_0)$ тоже является решением этой системы, значит, единственное решение возможно, только если $y = 0$:

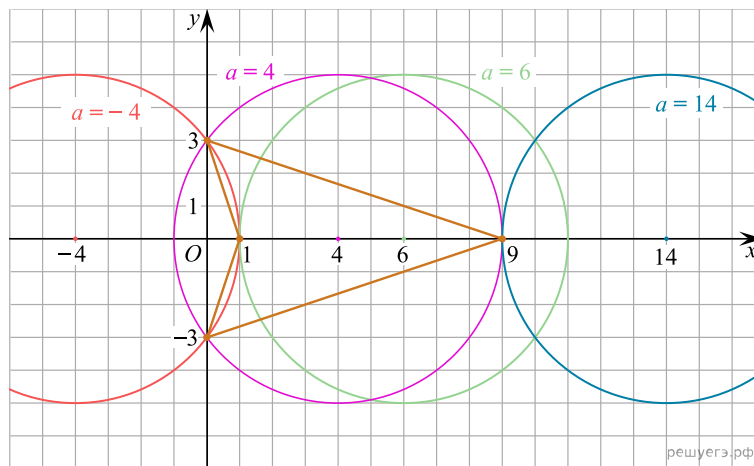
$$\begin{cases} (3x - 3)(x - 9) = 0, \\ (x - a)^2 = 25, \\ x \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 9, \\ (x - a)^2 = 25 \end{cases}$$

Таким образом, единственным решением системы могут быть или пара чисел $(1; 0)$ при $a = -4$ или $a = 6$, или пара чисел $(9; 0)$ при $a = 4$ или $a = 14$. Найдем число решений системы при найденных значениях параметра a .

Рассмотрим уравнение $(3x + |y| - 3)(x + 3|y| - 9) = 0$ при $x \geq 0$:

$$\begin{cases} (3x + |y| - 3)(x + 3|y| - 9) = 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = 3 - 3x, \\ 3|y| = 9 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm(3 - 3x), \\ 0 \leq x \leq 1, \\ y = \pm\left(3 - \frac{x}{3}\right), \\ 0 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

Графиком полученной совокупности является замкнутая ломаная (выделена оранжевым). Графиком уравнения $(x - a)^2 + y^2 = 25$ является окружность с центром $(a; 0)$ радиусом 5.



Анализируя график, приходим к выводу, что при $a = -4$, $a = 4$, $a = 6$ система имеет ровно три решения, а при $a = 14$ система имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = 14$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Достаточно заметить, что в последовательности 1975237796915163559217996... после каждой чётной цифры идут подряд четыре нечётные цифры. Поэтому четвёрка 1234 в этой последовательности встретиться не может. Четвёрка 3269 тоже встретиться не может.

б) В условии задачи дано правило, как по четырём рядом стоящим цифрам определять следующую цифру. Попробуем сделать наоборот: по четырём рядом стоящим цифрам $abcd$ определить предшествующую им цифру x . Поскольку цифра d следует за четвёркой цифр $xabc$, то цифра d равна последней цифре суммы $x + a + b + c$ и, значит, $x + a + b + c = 10k + d$ при некотором целом k . Отсюда $x = 10k + (d - a - b - c)$. Поскольку x — цифра, то из последнего выражения следует, что x равно остатку от деления на 10 числа $(d - a - b - c)$. Разделить число p на число q с остатком — значит, найти числа s и r такие, что $p = sq + r$ и $0 \leq r < q$. Остаток от деления одного целого числа на другое определяется однозначно; значит, цифра x также определяется однозначно. Например, чтобы определить цифру, предшествующую четвёрке 1975, надо от 5 отнять 1, 9, 7 и разделить полученное число (-12) с остатком на 10. В остатке получим 8; значит, цифра 8 предшествует четвёрке 1975. Итак, мы доказали следующее утверждение: двум одинаковым четвёркам цифр, стоящих рядом в последовательности 197523..., предшествует одна и та же цифра. Поскольку различных четвёрок цифр конечное число, а именно 10000 штук, то в бесконечной последовательности 197523... какая-то четвёрка встретится вторично. Пусть это будет четвёрка цифр a, b, c, d . Тогда последовательность имеет вид

197523 ... $xabcd$... $yabcd$...

Напишем под этой последовательностью эту же последовательность ещё раз, но «сдвинутую» так, чтобы под первой четвёркой $a b c d$ оказалась вторая. Согласно доказанному выше утверждению $x = y$. Аналогично, совпадают цифры и в предшествующем x и y столбце, и так далее. Поэтому под четвёркой 1975 в «верхней» последовательности

стоит четвёрка 1975 в «нижней» последовательности. А это и означает, что четвёрка 1975 встречается в последовательности 197523 ... вторично.

в) Как было показано выше, перед четвёркой цифр 1975, встречающейся в последовательности 197523 ... во второй раз, будет стоять цифра 8. Значит, в рассматриваемой последовательности встретится четвёрка 8197.
