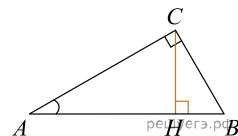


Вариант 126

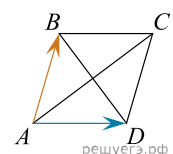
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $AC = 3$, $\cos A = \frac{1}{6}$. Найдите BH .



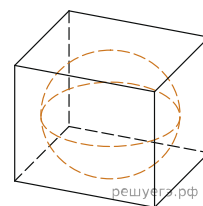
№ 2.

Диагонали изображенного на рисунке ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AD}$.



№ 3.

В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объем этого шара, деленный на π .



№ 4.

За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

№ 5.

Симметричную монету бросают 10 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадет ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадет ровно 4 орла»?

№ 6.

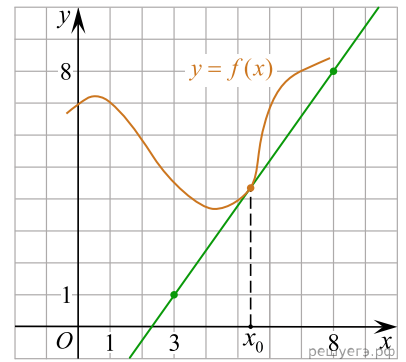
Найдите корень уравнения $16^{x-9} = \frac{1}{2}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $5 \operatorname{tg} 17^\circ \cdot \operatorname{tg} 107^\circ$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 9.

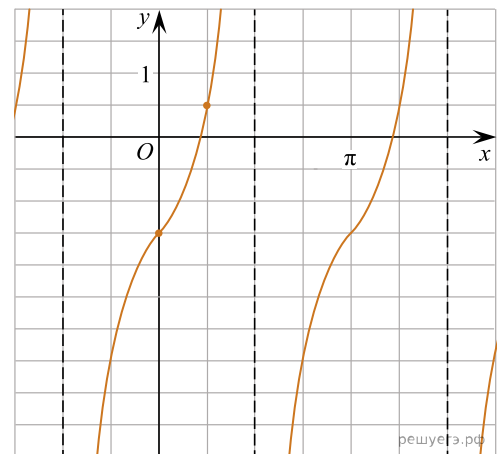
Гоночный автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч². Скорость v в конце пути вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Определите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 250 метров, приобрести скорость 60 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

№ 10.

Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \tan x + b$. Найдите b .



№ 12.

Найдите точку минимума функции $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 1$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4} = \sin \left(\frac{5\pi}{2} - x \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

№ 14.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 16 на ребрах AC и A_1C_1 выбраны соответственно точки M и K так, что $AM:MC = 11:5$, $A_1K:KC_1 = 3:5$, точка N — середина BC .

- Докажите, что точка B_1 лежит в плоскости KMN .
- Найдите высоту призмы, если известно, что она равна расстоянию от точки C_1 до плоскости KMN .

№ 15.

Решите неравенство: $25^x - 20^x - 2 \cdot 16^x \leq 0$.

№ 16.

Ольга хочет взять в кредит 100000 рублей под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 тысяч рублей?

№ 17.

В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

- Докажите, что $AB = CD$.
- Найдите AD , если $AB = 2$, $BC = 7$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$ имеет более двух корней.

№ 19.

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b , записанных на доске заменяется на два числа: $a + b$ и $2a - 1$ или $a + b$ и $2b - 1$.

Пример: числа 2 и 3 заменяются на 3 и 5, на 5 и 5 соответственно.

- Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.
- Может ли после 50 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 100?
- Сделали 2015 ходов, причём на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27280	17,5
2	27715	12
3	27126	4,5
4	325917	0,125
5	508780	1,2

6	26654	8,75
7	26770	-5
8	541372	1,4
9	510825	7200
10	99577	60
11	509143	-1,5
12	77453	4

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin \frac{7x}{2} \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{7x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos^2 3x \Leftrightarrow$$

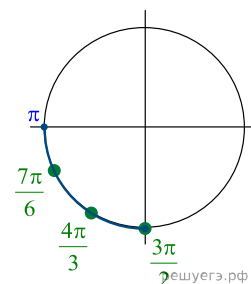
$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{7x}{2} - \frac{x}{2} \right) = \cos^2 3x \Leftrightarrow \cos^2 3x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x (\cos 3x - 1) = 0. \Leftrightarrow \cos \left(\frac{7x}{2} - \frac{x}{2} \right) = \cos^2 3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 3x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x (\cos 3x - 1) = 0.$$

Следовательно, $\cos 3x = 0$ или $\cos 3x = 1$, а значит, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$ или $x = \frac{2\pi}{3}k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$, отберём с помощью

единичной окружности. Получаем: $\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k; \frac{2\pi}{3}k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Стороны основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 16, поэтому

$$A_1K = 6,$$

$$KC_1 = 10,$$

$$AM = 11$$

$$MC = 5,$$

$$BN = NC = 8.$$

Продлим прямую KM до пересечения с прямой CC_1 в точке P . Прямая MC параллельна прямой KC_1 и $MC = \frac{1}{2}KC_1$. Отрезок MC — средняя линия треугольника KC_1P , следовательно, отрезки CC_1 и CP равны. Тогда прямая B_1P должна пересекать BC в середине, значит, точка N лежит на прямой B_1P , а потому лежит в плоскости KMN .

б) Пусть $AA_1 = x$, тогда высота пирамиды C_1KB_1P , проведенная из точки C , тоже равна x . Выразим объем пирамиды C_1KB_1P двумя способами:

$$V = \frac{1}{3} \cdot PC_1 \cdot S_{KC_1B_1} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot S_{KB_1P}.$$

Отрезок PC_1 равен $2x$. Используя теорему Пифагора и теорему косинусов, вычислим:

$$KB_1 = \sqrt{10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}} = 14,$$

$$KP = \sqrt{4x^2 + 100},$$

$$B_1P = \sqrt{4x^2 + 256},$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \angle B_1KP &= \frac{KB_1^2 + KP^2 - B_1P^2}{2KB_1 \cdot KP} = \frac{196 + 4x^2 + 100 - 4x^2 - 256}{2 \cdot 14 \cdot \sqrt{4x^2 + 100}} = \frac{5}{7\sqrt{x^2 + 25}}. \\ \cos \angle B_1KP &= \frac{KB_1^2 + KP^2 - B_1P^2}{2KB_1 \cdot KP} = \\ &= \frac{196 + 4x^2 + 100 - 4x^2 - 256}{2 \cdot 14 \cdot \sqrt{4x^2 + 100}} = \frac{5}{7\sqrt{x^2 + 25}}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\sin \angle B_1KP = \frac{\sqrt{49x^2 + 1200}}{7\sqrt{x^2 + 25}}.$$

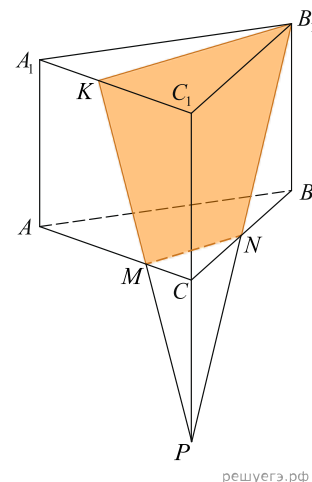
Выразим площади треугольников KB_1P и KC_1B_1 :

$$S_{KB_1P} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \sqrt{4x^2 + 100} \cdot \frac{\sqrt{49x^2 + 1200}}{7\sqrt{x^2 + 25}} = 2\sqrt{49x^2 + 1200},$$

$$S_{KC_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}.$$

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot 40\sqrt{3} &= \frac{1}{3}x\sqrt{49x^2 + 1200} \cdot 2 \Leftrightarrow 49x^2 + 1200 = 4800 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3600}{49} \Leftrightarrow x = \frac{60}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2x \cdot 40\sqrt{3} = \frac{1}{3}x\sqrt{49x^2 + 1200} \cdot 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 49x^2 + 1200 = 4800 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3600}{49} \Leftrightarrow x = \frac{60}{7}. \end{aligned}$$



решуегэ.рф

Ответ: б) $\frac{60}{7}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Разделим обе части неравенства на положительное выражение 16^x .

$$\left(\frac{25}{16}\right)^x - \left(\frac{20}{16}\right)^x - 2 \leq 0,$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{2x} - \left(\frac{5}{4}\right)^x - 2 \leq 0.$$

Сделаем замену $z = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Получаем: $z^2 - z - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq z \leq 2$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\left(\frac{5}{4}\right)^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \log_{1,25} 2$.

Ответ: $(-\infty; \log_{1,25} 2]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Чтобы количество лет было минимальным необходимо, чтобы размер выплат был максимальным. Поэтому ежегодные выплаты должны составлять 24тыс.руб. Тогда в конце года оставшаяся сумма долга умножается на величину 1,1, а после начисления процентов долг уменьшается на 24 тыс. руб. Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток доли после выплаты (руб.)
	100000	
1	110000	86000
2	94600	70600

3	77660	53660
4	59026	35026
5	38528,6	14528,6
6	15981,46	0

Ольга погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6.

№ 17.

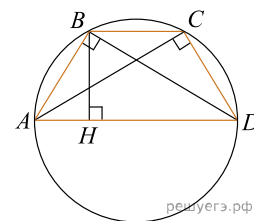
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Углы ABD и ACD прямые, поэтому вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности диаметром AD . Значит, $AB = CD$, поскольку $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$.

б) Пусть BH — высота трапеции $ABCD$. Трапеция вписана в окружность, поэтому она равнобедренная. Следовательно, $AD = 2AH + BC$. Тогда

$$AH = AB \cos \widehat{BAD} = AB \cdot \frac{AB}{AD} = \frac{AB^2}{BC + 2AH} = \frac{4}{7 + 2AH},$$

откуда получаем уравнение $2AH^2 + 7AH - 4 = 0$. Его положительным корнем является $AH = 0,5$, и тогда $AD = 8$.



Ответ: 8.

Приведем другую идею решения пункта б).

Так как BH — высота прямоугольного треугольника ABD , квадрат катета AB равен произведению проекции этого катета на гипотенузу, то есть проекции AH на AD . Но $AD = BC + 2AH$, откуда получаем $AB^2 = AH(7 + 2AH)$ или $2AH^2 + 7AH - 4 = 0$.

Приведем решение пункта б) Анастасии Белоусовой.

По теореме Птолемея произведение диагоналей четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

Трапеция равнобедренная, следовательно, ее диагонали равны, тогда

$$AC^2 = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

Из прямоугольного треугольника ACD получим $AC^2 = AD^2 - CD^2$.

Пусть $AD = x$, тогда

$$7x + 4 = x^2 - 4 \Leftrightarrow x = 8.$$

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

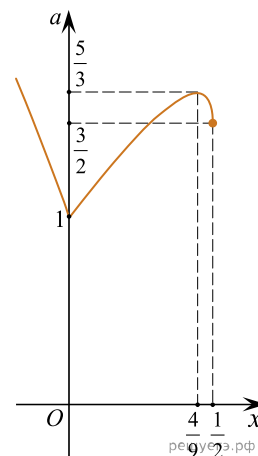
Решение. Запишем уравнение в виде $a = 3|x| + \sqrt{1-2x}$, рассмотрим функцию $a(x) = 3|x| + \sqrt{1-2x}$. Раскрывая модуль, получаем:

$$a(x) = \begin{cases} -3x + \sqrt{1-2x}, & \text{если } x \leq 0, \\ 3x + \sqrt{1-2x}, & \text{если } 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

При $x \leq 0$ функция $a(x)$ убывает, принимая все значения из промежутка $[1; +\infty)$. Чтобы изучить поведение функции при положительных значениях переменной, найдем производную:

$$a'(x) = 3 - \frac{1}{\sqrt{1-2x}} = \frac{3\sqrt{1-2x} - 1}{\sqrt{1-2x}}.$$

Производная обращается в нуль в точке $x = \frac{4}{9}$, меняя знак с плюса на минус. Следовательно, эта точка является точкой максимума, причем $a_{\max} = \frac{5}{3}$. Построим эскиз графика функции (см. рис.). Из графика заключаем, что уравнение имеет три корня при $a \in \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$.



Ответ: $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

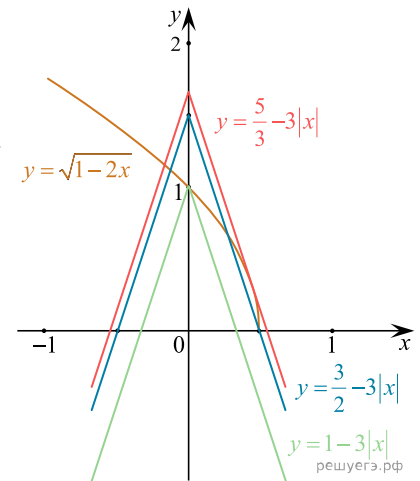
Приведём другое решение.

Определим, для каких значений a графики функции $y = \sqrt{1-2x}$ и $y = a - 3|x|$ имеют более двух общих точек на луче $x \leq \frac{1}{2}$. При $a < 1$ уравнение не имеет решений. При $a = 1$ уравнение имеет единственный корень $x = 0$. При $1 < a < \frac{5}{2}$ уравнение имеет два решения. Пусть m — значение a , которому соответствует точка касания графика функции $y = m - 3|x|$ и графика функции $y = \sqrt{1-2x}$. Тогда при $\frac{3}{2} \leq a < m$, уравнение имеет три решения, при $a = m$ уравнение имеет два решения, при $a > m$ уравнение имеет единственное решение. Найдем m из условия касания:

$$\begin{cases} y'(x_0) = -3, \\ m = -y'(x_0) \cdot x_0 + y(x_0). \end{cases}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \frac{-2}{2\sqrt{1-2x_0}} = -3, \\ m = 3x_0 + \sqrt{1-2x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-2x_0} = \frac{1}{3}, \\ m = 3x_0 + \sqrt{1-2x_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{4}{9}, \\ m = \frac{5}{3}. \end{cases}$$



Таким образом, уравнение имеет больше двух решений при $a \in \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$.

Ответ: $\left[\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$.

Приведём ещё одно решение.

Рассмотрим функции $f(x) = a - 3|x|$ и $g(x) = \sqrt{1-2x}$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$.

На промежутке $(-\infty, 0)$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $(-\infty, 0)$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда, $f(0) > g(0)$, то есть при $a > 1$.

При $x \geq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $a - 3x = \sqrt{1-2x}$. При $x > \frac{a}{3}$ левая часть этого уравнения отрицательна, следовательно, решений нет. При $x \leq \frac{a}{3}$ это уравнение сводится к квадратному уравнению $9x^2 + (2-6a)x + (a^2-1) = 0$, дискриминант которого $D = (2-6a)^2 - 36(a^2-1) = 40-24a$, поэтому при $a > \frac{5}{3}$ это уравнение не имеет корней, при $a = \frac{5}{3}$ — уравнение имеет единственный корень, равный $\frac{4}{9}$, при $a < \frac{5}{3}$ — уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{6a-2-\sqrt{D}}{18} = \frac{a}{3} - \frac{2+\sqrt{D}}{18}$$

$$\text{и } x_2 = \frac{6a-2+\sqrt{D}}{18} = \frac{a}{3} - \frac{2-\sqrt{D}}{18}.$$

Меньший корень $x_1 < \frac{a}{3}$, а больший корень x_2 не превосходит $\frac{a}{3}$, если $\sqrt{D} \leq 2$, то есть при $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{6a-2}{9}$, $x_1 x_2 = \frac{a^2-1}{9}$, поэтому знаки корней x_1 и x_2 зависят от знаков выражений $\frac{6a-2}{9}$ и $\frac{a^2-1}{9}$. Значит, при $a < -1$ оба корня отрицательны, при $-1 \leq a < 1$ один из корней отрицательный, а другой неотрицательный, при $a \geq 1$ оба корня неотрицательны. Следовательно, при $x \geq 0$ уравнение $a - 3x = \sqrt{1-2x}$ не имеет корней при $a < 1$ и $a > \frac{5}{3}$, имеет один корень при $1 \leq a < \frac{3}{2}$ и $a = \frac{5}{3}$, имеет два корня при $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

Таким образом, заключаем, что уравнение $\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$:

- не имеет корней при $a < 1$;
- имеет один корень при $a = 1$ и $a > \frac{5}{3}$;
- имеет два корня при $1 < a < \frac{3}{2}$ и $a = \frac{5}{3}$;
- имеет три корня при $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

Ответ: $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) (2, 3), (5, 5), (10, 9), (19, 17).

б) Заметим, что сумма чисел на доске увеличивается на $2a - 1 \geq 3$ или $2b - 1 \geq 3$ (поскольку число 1 на доске никогда не появится). Значит, после 49 ходов сумма станет минимум $5 + 49 \cdot 3 > 100$. Поэтому после пятидесятого хода $a + b \neq 100$. В то же время $2a - 1 \neq 100$ и $2b - 1 \neq 100$, потому что левая часть нечетна, а правая четна.

в) После хода разность чисел становится равна $(a + b) - (2a - 1) = (b - a) + 1$ или $(a + b) - (2b - 1) = (a - b) + 1$. Поэтому модуль разности чисел меняется на 1. Изначально он был равен 1, поэтому после 2015 ходов он будет четным. Значит, равен как минимум двум.

Приведем пример. Первым ходом получим пару (5;3), а затем каждые два хода будем получать ситуацию, в которой числа отличаются на 2 (и никогда в процессе не будут равны):

$$(x + 2, x) \mapsto (2x + 2, 2x + 3) \mapsto (4x + 5, 4x + 3).$$

Повторяя эти действия, получим в итоге два числа с разностью 2.

Ответ: а) (2, 3), (5, 5), (10, 9), (19, 17); б) нет; в) 2.