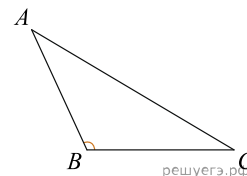


Вариант 128

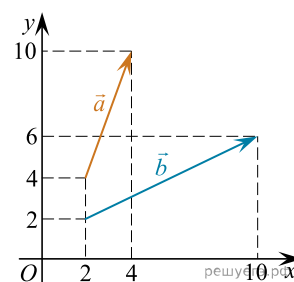
№ 1.

В треугольнике ABC угол B — тупой, $AB = 5$, $BC = 6$. Найдите величину угла, противолежащего стороне AC , если площадь треугольника равна 7,5. Ответ дайте в градусах.



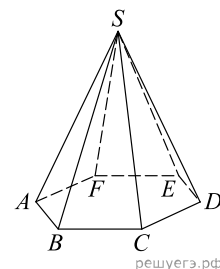
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.



№ 4.

На рок-фестивале выступают группы— по одной от каждой из заявленных стран. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Дании будет выступать после группы из Швеции и после группы из Норвегии? Результат округлите до сотых.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика числа 5 и 6 встречаются по три раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 5 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 6.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$.

№ 7.

Найдите $p(x) + p(6-x)$, если $p(x) = \frac{x(6-x)}{x-3}$ при $x \neq 3$.

№ 8.

Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

№ 9.

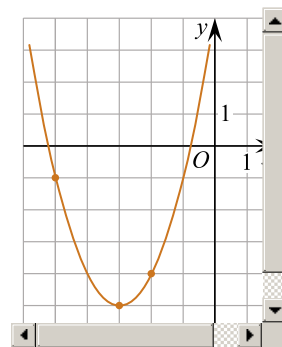
Электрический прибор после включения в сеть нагревается и через некоторое время автоматически выключается и начинает остывать. Температура прибора в градусах Цельсия вычисляется по формуле: $T = -t^2 + 14t + T_0$, где t — время в минутах, прошедшее после включения прибора в сеть, $T_0 = 25^\circ\text{C}$ — начальная температура прибора. На протяжении какого времени в минутах температура прибора будет не менее 70°C ?

№ 10.

Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.

**№ 12.**

Найдите наибольшее значение функции $y = x^7 + 5x^3 - 16$ на отрезке $[-9; 1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

№ 14.

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник ABC со сторонами $AB = BC$, $AC = 4\sqrt{2}$. На ребре BB_1 выбрана точка K так, что $BK : B_1K = 2 : 3$. Угол между плоскостями ABC и AKC равен 45° .

- а) Докажите, что расстояние между прямыми AB и A_1C_1 равно боковому ребру призмы.
 - б) Найдите расстояние между прямыми AB и A_1C_1 , если $KC = 8$.
-

№ 15.

Решите неравенство:

$$\log_4(16(x-2)^2) \cdot \log_{\frac{1}{16}} \frac{(x-2)^4}{64} - \frac{5}{4} \log_{64} (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)^2 < \frac{15}{2}.$$

№ 16.

В июле клиент планирует взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планирует клиент взять кредит, если наибольший годовой платёж составит 1,8 млн рублей?

№ 17.

Первая окружность проходит через вершины A и B треугольника ABC и пересекает стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Вторая окружность проходит через точки D и E и пересекает продолжения сторон BC и AC за вершину C в точках M и N соответственно.

- а) Докажите, что прямая MN параллельна прямой AB .

б) Прямые MD и NE вторично пересекают первую окружность в точках X и Y соответственно. Найдите ее радиус, если $AX = XY = 2$, а $AB = 4$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - 2xy - 6y + 12)\sqrt{6-x} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

№ 19.

Для чисел A и B , состоящих из одинакового количества цифр, вычислили S — сумму произведений соответствующих цифр. Например, для числа $A = 123$ и $B = 579$ получается сумма $S = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 46$.

а) Существуют ли трёхзначные числа A и B , для которых $S = 100$?

б) Существуют ли пятизначные числа A и B , для которых $S = 400$?

В) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 260 является суммой для некоторых четырёхзначных чисел A и B ?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	561168	150
2	27736	20
3	27179	12
4	320186	0,33
5	508893	0,9
6	26653	4
7	26804	0
8	27486	-1
9	676852	4
10	99616	8
11	508935	31
12	520207	-10

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Уравнение определено, если $\sin x \neq 0$. Умножим на $\sin x$ при этом условии и разложим на множители:

$$\operatorname{ctg} x - \sin x - \sqrt{3} \cos x + \frac{1}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow_{\sin x \neq 0} \cos x - \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x - \sin x - \sqrt{3} \cos x + \frac{1}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow_{\sin x \neq 0} \\ \Leftrightarrow \cos x - \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

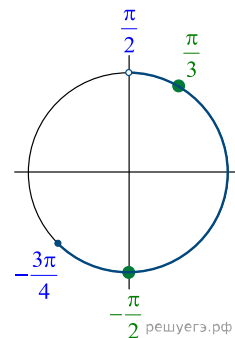
$$\Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos x - \sqrt{3} \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \cos^2 x + \cos x - \sqrt{3} \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos x (\cos x - \sqrt{3} \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\pi + 2\pi k, \end{cases}$$

Последняя серия не подходит, поскольку $\sin x \neq 0$. Таким образом, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Отбор корней проведем на тригонометрической окружности (см. рис.). На заданном полуинтервале лежат два корня: $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Прямые AB и A_1C_1 — скрещивающиеся и лежат в параллельных основаниях призмы. Поэтому расстояние между этими прямыми равно расстоянию между основаниями, то есть боковому ребру призмы.

б) Проведём BM — высоту равнобедренного треугольника ABC , являющуюся также медианой. Прямая KM — наклонная, по теореме о трёх перпендикулярах прямые KM и AC взаимно перпендикулярны. Таким образом, угол KMB — линейный угол двугранного угла между плоскостями ABC и AKC и, следовательно, равен 45° , а треугольник KMB — прямоугольный и равнобедренный. Тогда

$$CM = \frac{1}{2}AC = 2\sqrt{2},$$

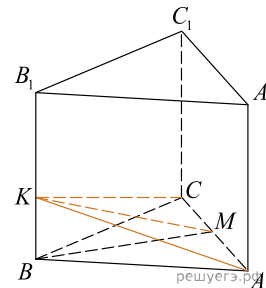
$$KM = \sqrt{KC^2 - CM^2} = 2\sqrt{14}.$$

Далее, поскольку $KB = BM$, находим:

$$KB^2 + BM^2 = KM^2 \Leftrightarrow KB = 2\sqrt{7},$$

$$BB_1 = \frac{5}{2}KB = 5\sqrt{7}.$$

Ответ: б) $5\sqrt{7}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Перейдем к основанию 4:

$$\begin{aligned} \log_4(16(x-2)^2) \cdot \log_{\frac{1}{16}} \frac{(x-2)^4}{64} - \frac{5}{4} \log_{64} (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)^2 &< \frac{15}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 + \log_4(x-2)^2) \cdot \log_4 \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{5}{4} \log_4 (x-2)^2 &< \frac{15}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 + \log_4(x-2)^2) \cdot \left(\log_4(x-2)^2 - \frac{3}{2} \right) - \frac{5}{4} \log_4 (x-2)^2 &< \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Пусть $\log_4(x-2)^2 = t$, тогда

$$\begin{aligned} (2+t) \cdot \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}t &< \frac{15}{2} \Leftrightarrow (2+t)(2t-3)^2 - 5t < 30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2+t)(4t^2 - 12t + 9) - 5t < 30 &\Leftrightarrow 4t^3 - 4t^2 - 20t - 12 < 0 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 5t - 3 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (t+1)(t^2 - 2t - 3) < 0 &\Leftrightarrow (t+1)^2(t-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1, \\ -1 < t < 3. \end{cases} \quad (2+t) \cdot \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}t < \frac{15}{2} \Leftrightarrow (2+t)(2t-3)^2 - 5t < 30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2+t)(4t^2 - 12t + 9) - 5t < 30 &\Leftrightarrow 4t^3 - 4t^2 - 20t - 12 < 0 \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 5t - 3 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (t+1)(t^2 - 2t - 3) < 0 &\Leftrightarrow (t+1)^2(t-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1, \\ -1 < t < 3. \end{cases} \quad (2+t) \cdot \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}t < \frac{15}{2} \Leftrightarrow (2+t)(2t-3)^2 - 5t < 30 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2+t)(4t^2 - 12t + 9) - 5t < 30 &\Leftrightarrow 4t^3 - 4t^2 - 20t - 12 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 5t - 3 < 0 &\Leftrightarrow (t+1)(t^2 - 2t - 3) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (t+1)^2(t-3) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} t < -1, \\ -1 < t < 3. \end{cases} \quad (2+t) \cdot \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}t < \frac{15}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2+t)(4t^2 - 12t + 9) - 5t < 30 &\Leftrightarrow 4t^3 - 4t^2 - 20t - 12 < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow t^3 - t^2 - 5t - 3 < 0 &\Leftrightarrow (t+1)(t^2 - 2t - 3) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (t+1)^2(t-3) < 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} t < -1, \\ -1 < t < 3. \end{cases} \quad (2+t) \cdot \left(t - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4}t < \frac{15}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2+t)(2t-3)^2 - 5t < 30 &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (2+t)(4t^2-12t+9)-5t < 30 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 4t^3-4t^2-20t-12 < 0 \Leftrightarrow t^3-t^2-5t-3 < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (t+1)(t^2-2t-3) < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (t+1)^2(t-3) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1, \\ -1 < t < 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{aligned}
\left[\log_4(x-2)^2 < -1, \right. &\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &0 < (x-2)^2 < 4^{-1}, \\ &-1 < \log_4(x-2)^2 < 3 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &-0,5 < x-2 < 0, \\ &0 < x-2 < 0,5, \\ &-8 < x-2 < -0,5, \\ &0,5 < x-2 < 8 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &1,5 < x < 2, \\ &2 < x < 2,5, \\ &-6 < x < 1,5, \\ &2,5 < x < 10. \end{aligned} \right. \left[\log_4(x-2)^2 < -1, \right. \\
&\left. -1 < \log_4(x-2)^2 < 3 \right] \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &0 < (x-2)^2 < 4^{-1}, \\ &-1 < \log_4(x-2)^2 < 3 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &0 < (x-2)^2 < 4^{-1}, \\ &-1 < \log_4(x-2)^2 < 3 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &-0,5 < x-2 < 0, \\ &0 < x-2 < 0,5, \\ &-8 < x-2 < -0,5, \\ &0,5 < x-2 < 8 \end{aligned} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &1,5 < x < 2, \\ &2 < x < 2,5, \\ &-6 < x < 1,5, \\ &2,5 < x < 10. \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Ответ: $(-6; 1,5) \cup (1,5; 2) \cup (2; 2,5) \cup (2,5; 10)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$6, \frac{6(n-1)}{n}, \dots, \frac{6 \cdot 2}{n}, \frac{6}{n}, 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$7,2, \frac{7,2(n-1)}{n}, \dots, \frac{7,2 \cdot 2}{n}, \frac{7,2}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$1,2 + \frac{6}{n}, \frac{1,2(n-1)+6}{n}, \dots, \frac{1,2 \cdot 2 + 6}{n}, \frac{1,2+6}{n}.$$

Получаем $1,2 + \frac{6}{n} = 1,8$, откуда $n = 10$.

Ответ: 10.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что углы CDE и CMN равны как вписанные, опирающиеся на одну дугу. По свойству смежных углов

$$\angle CDE = 180^\circ - \angle ADE = 180^\circ - (180^\circ - \angle ABE) = \angle ABE.$$

Отсюда получаем, что прямые MN и AB параллельны между собой. Что и требовалось доказать.

б) Заметим, что

$$\angle DMN = 180^\circ - \angle DEN = \angle DEY = 180^\circ - \angle DXY.$$

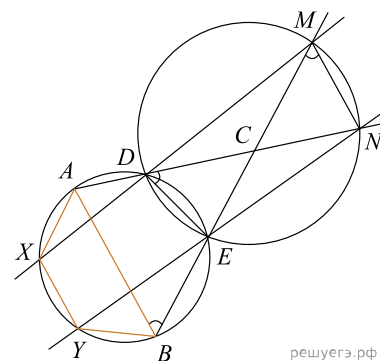
Значит, по признаку параллельности прямые MN и XY параллельны. Тогда четырехугольник $AXYB$ трапеция, вписанная в окружность. Следовательно, $AX = YB = 2$.

В равнобокой трапеции $AXYB$ проведем высоту XH , найдем $AH = \frac{4-2}{2} = 1$. Значит, $\angle XAH = 60^\circ$. По теореме Пифагора получаем, что $XH = \sqrt{3}$ и $XB = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$. По теореме синусов

$$2R = \frac{XB}{\sin \angle A} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4,$$

отсюда $R = 2$.

Ответ: б) 2.



решуегэ.рф

№ 18.

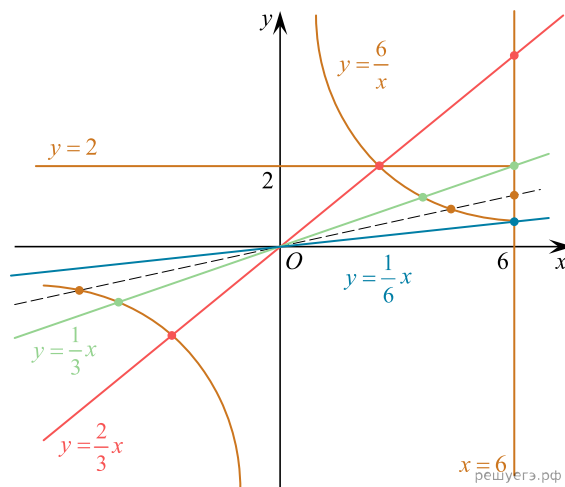
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(xy^2 - 2xy - 6y + 12)\sqrt{6-x} = 0 \Leftrightarrow (xy(y-2) - 6(y-2))\sqrt{6-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (xy-6)(y-2)\sqrt{6-x}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{6}{x}, \\ y=2, \\ x=6, \\ x\leq 6. \end{cases}$$

Исходная система имеет ровно три различных решения тогда и только тогда, когда графики функций $y=\frac{6}{x}$ и $y=2$ и прямая $x=6$ имеют с прямой $y=ax$ три различных точки пересечения на области $x\leq 6$ (см. рис.).



Из рисунка видно, что при $a < 0$ два решения, при $a = 0$ одно решение, при $0 < a \leq \frac{1}{6}$ два решения, при $\frac{1}{6} < a \leq \frac{1}{3}$ три решения, при $\frac{1}{3} < a < \frac{2}{3}$ четыре решения, при $a = \frac{2}{3}$ три решения, при $a > \frac{2}{3}$ четыре решения.

Ответ: $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Например 555 и 875.

б) Для чисел $A = B = 99999$ сумма равна $5 \cdot 9^2 = 405$. Для любых других чисел одно из произведений будет не больше $9 \cdot 8 = 72$ и сумма произведений будет не больше

$$72 + 4 \cdot 9^2 = 396 < 400.$$

в) Запишем число от 1 до 260 в виде $1 + 9n + x$, где $x \in [0; 8]$. Тогда $n \leq 28$.

Если $n \leq 18$, выберем две цифры s, t для которых $s+t=n$. Тогда числа $\overline{1stx}$ и $\overline{1991}$ дадут

$$1 + 9s + 9t + x = 1 + 9n + x.$$

Если $n \in [19; 27]$, выберем две цифры s, t для которых $s+t=n-9$. Тогда числа $\overline{9st(x+1)}$ и $\overline{9991}$ дадут

$$81 + 9s + 9t + x + 1 = 1 + 9n + x.$$

Пусть, наконец, $n = 28$. Нам осталось записать в нужном виде числа от 253 до 260. Сделаем это:

9992, 9995 $\mapsto$ 253;

9994, 9985 $\mapsto$ 254;

9993, 9994 $\mapsto$ 255;

9998, 9965 $\mapsto$ 256;

9992, 9997 $\mapsto$ 257;

9993, 9995 $\mapsto$ 258;

9992, 9998 $\mapsto$ 259;

9995, 9977 $\mapsto$ 260.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.
