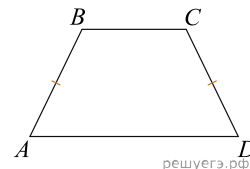


Вариант 129

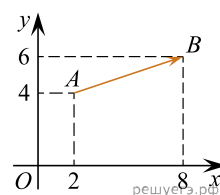
№ 1.

Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 50° ? Ответ дайте в градусах.



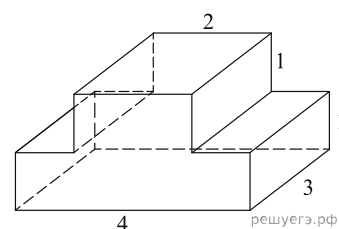
№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\overrightarrow{AB}$.



№ 3.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

В классе 26 учащихся, среди них два друга— Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

№ 5.

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

№ 6.

Найдите корень уравнения: $x^2 - 17x + 72 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

№ 7.

Найдите $\frac{a+9b+16}{a+3b+8}$, если $\frac{a}{b} = 3$.

№ 8.

Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

№ 9.

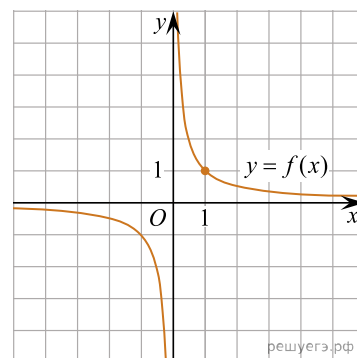
Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = \text{const}$, где p (атм.) — давление газа, V — объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

№ 10.

Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15часов. Через 3часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите $f(10)$.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

№ 13.

а) Решите уравнение: $\sqrt{x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 1} = \sqrt{x^4 + 2x^2}$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 0,5; \log_3 2]$.

№ 14.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 5. На его ребре AA_1 отмечена точка M так, что $AM=3$. Через точки M и B_1 проведена плоскость α , параллельная AC_1 .

а) Докажите, что $D_1 N : N A_1 = 1 : 2$, если N — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 D_1$.

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α .

№ 15.

Решите неравенство $\frac{10^x}{2\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)} \leq \frac{(15 \cdot 3^x)^x}{9\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)}$.

№ 16.

Игнат 7 марта 2022 года положил на вклад в банке 400 000 рублей. Условия этого вклада таковы:

— в течение года запрещается выполнять какие-либо операции с этим вкладом;

— через каждые 3 месяца (до 7 марта 2023 года) банк увеличивает сумму, к тому моменту находящуюся на вкладе, на 0,25%.

Андрей 7 марта 2022 года положил на вклад в банке 410700 рублей под 20% годовых. Условия этого вклада таковы:

— в течение года запрещается выполнять какие-либо операции с этим вкладом;

— 7 марта 2023 года банк увеличит вклад на 20%.

Известно, что Игнат через год получит со счета больше, чем Андрей. Найдите наименьшее целое значение x .

№ 17.

Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C . Проведена высота CH . На сторонах AC и BC соответственно отмечены точки M и N так, что угол MHN прямой.

а) Докажите, что треугольники MNH и ABC подобны.

б) Найдите BN , если $AM = 9$, $MC = 3$, $BC = 8$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + a = 0, \\ |y| - x^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

имеет два решения.

№ 19.

Можно ли из последовательности $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ выделить арифметическую прогрессию

а) длиной 4;

б) длиной 5;

в) длиной k , где k — любое натуральное число?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27818	115
2	27664	40
3	25681	48
4	320192	0,48
5	319355	0,156

6	26667	8
7	26807	2
8	119972	0,125
9	27993	0,05
10	99613	9
11	660801	0,1
12	77427	-1

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Подкоренные выражения должны быть равны и неотрицательны:

$$\sqrt{x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 1} = \sqrt{x^4 + 2x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 2x^2 \geq 0; \\ x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 1 = x^4 + 2x^2 \Leftrightarrow 8x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

б) Заметим, что $\frac{1}{2} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{3}$. Неравенство $0,5 \leq \sqrt{3} \leq 2$ является верным, следовательно, корень $x = \frac{1}{2}$ принадлежит отрезку $[\log_3 0,5; \log_3 2]$.

Ответ: а) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

№ 14.

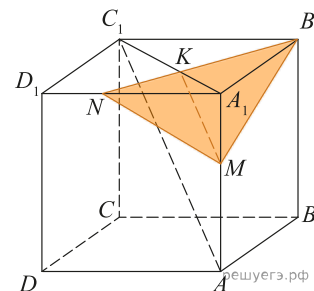
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Соединим точки M и B_1 . Через точку M в плоскости AA_1C_1 проведем прямую параллельную прямой AC_1 . Пусть K — точка пересечения этой прямой с прямой A_1C_1 . Точка K лежит в плоскости α . Проведем прямую KB_1 , она пересечет ребро A_1D_1 в точке N . Соединим точки M и N , тогда MNB_1 — сечение куба плоскостью α . Заметим, что прямые MK и AC_1 , а также прямые A_1D_1 и B_1C_1 параллельны. Из этого следует, что треугольники A_1KM и A_1C_1A , а также треугольники A_1KN и C_1KB_1 подобны. Таким образом,

$$\frac{A_1N}{B_1C_1} = \frac{AK}{KC_1} = \frac{A_1M}{MA} = \frac{AA_1 - AM}{AM} = \frac{2}{3},$$

следовательно, $D_1N : NA_1 = 1 : 2$.



б) Плоскость α отсекает от куба треугольную пирамиду A_1MNB_1 со взаимно перпендикулярными ребрами: $A_1M = 2$, $A_1N = \frac{10}{3}$, $A_1B_1 = 5$. Найдём её объём:

$$V_{A_1MNB_1} = \frac{1}{6} A_1M \cdot A_1N \cdot A_1B_1 = \frac{50}{9}.$$

Тогда объём оставшейся части куба равен

$$V_1 = 125 - \frac{50}{9} = \frac{1075}{9}.$$

Ответ: б) $\frac{1075}{9}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Область определения неравенства задается системой соотношений:

$$\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ (x+1)^2 \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая. Если $-2 < x < -1$, то знаменатели отрицательны, тогда

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{10^x}{2\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)} \leq \frac{(15 \cdot 3^x)^x}{9\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 10^x \geq 2 \cdot (15 \cdot 3^x)^x, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{10^x}{2\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)} \leq \frac{(15 \cdot 3^x)^x}{9\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 10^x \geq 2 \cdot (15 \cdot 3^x)^x, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 2^x \cdot 5^x \geq 2 \cdot 5^x \cdot 3^x \cdot 3^{x^2}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^{x-1} \geq 3^{x^2+x-2}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3^{\log_3 2(x-1)} \geq 3^{(x-1)(x+2)}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 2(x-1) \geq (x-1)(x+2), \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(\log_3 2 - 2 - x) \geq 0, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 2 - 2 \leq x \leq 1, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \log_3 2 - 2 \leq x < -1. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 2^x \cdot 5^x \geq 2 \cdot 5^x \cdot 3^x \cdot 3^{x^2}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^{x-1} \geq 3^{x^2+x-2}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3^{\log_3 2(x-1)} \geq 3^{(x-1)(x+2)}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 2(x-1) \geq (x-1)(x+2), \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(\log_3 2 - 2 - x) \geq 0, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 2 - 2 \leq x \leq 1, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \log_3 2 - 2 \leq x < -1. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 2^x \cdot 5^x \geq 2 \cdot 5^x \cdot 3^x \cdot 3^{x^2}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^{x-1} \geq 3^{x^2+x-2}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3^{\log_3 2(x-1)} \geq 3^{(x-1)(x+2)}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 2(x-1) \geq (x-1)(x+2), \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(\log_3 2 - 2 - x) \geq 0, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 2 - 2 \leq x \leq 1, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \log_3 2 - 2 \leq x < -1. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 2^x \cdot 5^x \geq 2 \cdot 5^x \cdot 3^x \cdot 3^{x^2}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2^{x-1} \geq 3^{x^2+x-2}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3^{\log_3 2(x-1)} \geq 3^{(x-1)(x+2)}, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 2(x-1) \geq (x-1)(x+2), \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(\log_3 2 - 2 - x) \geq 0, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \log_3 2 - 2 \leq x \leq 1, \\ -2 < x < -1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \log_3 2 - 2 \leq x < -1.
 \end{aligned}$$

Если $-1 < x < 0$ или если $x > 0$, то знаменатели положительны, тогда

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \frac{10^x}{2\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)} \leq \frac{(15 \cdot 3^x)^x}{9\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)}, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 10^x \leq 2 \cdot (15 \cdot 3^x)^x, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{10^x}{2\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)} \leq \frac{(15 \cdot 3^x)^x}{9\log_2^2(x+1)^2 \cdot \log_3(x+2)}, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 9 \cdot 10^x \leq 2 \cdot (15 \cdot 3^x)^x, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x-1)(\log_3 2 - 2 - x) \leq 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} x \leq \log_3 2 - 2, \\ x \geq 1 \end{array}, \\ x > -1, \\ x \neq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 1.
 \end{aligned}$$

Объединяя результаты, получаем ответ.

Ответ: $[\log_3 2 - 2; -1) \cup [1; +\infty)$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть $k = 1 + \frac{0,25r}{100}$, тогда через год сумма на счету Игната составит $400\,000 \cdot k^4$ рублей. В то же время сумма на счету Андрея составит $410\,700 \cdot 1,2$ рублей, что по условию меньше суммы на счету Игната. Получаем:

$$400\,000 \cdot k^4 > 410\,700 \cdot 1,2 \Leftrightarrow 4000 \cdot k^4 > 4928,4 \Leftrightarrow k^4 > 1,2321 \Leftrightarrow k^2 > 1,11. \quad 400\,000 \cdot k^4 > 410\,700 \cdot 1,2 \Leftrightarrow 4000 \cdot k^4 > 4928,4 \Leftrightarrow k^4 > 1,2321 \Leftrightarrow k^2 > 1,11.$$

Вернёмся к переменной r .

$$\left(1 + \frac{0,25r}{100}\right)^2 > 1,11 \Leftrightarrow (400+r)^2 > 444 \cdot 400 \Leftrightarrow (400+r)^2 > 177\,600. \quad (*) \quad \left(1 + \frac{0,25r}{100}\right)^2 > 1,11 \Leftrightarrow (400+r)^2 > 444 \cdot 400 \Leftrightarrow (400+r)^2 > 177\,600. \quad (*)$$

При всех неотрицательных значениях r функция $y(r) = (400+r)^2$ является возрастающей, поэтому можно найти наименьшее целое решение неравенства(*) подбором. Для $y(21) = 421^2 = 177\,241$ неравенство не выполняется, а для $y(22) = 422^2 = 178\,084$ неравенство верно. Значит, оно верно для всех $r \geq 22$, и число 22 является его наименьшим целым решением.

Ответ: 22.

Примечание.

Условие задачи изменено редакцией сайта РЕШУ ЕГЭ. В оригинальной формулировке первое предложение «Игнат 7 марта 2022 года положил на вклад в банке 400000 рублей под $r\%$ годовых» противоречило дальнейшему условию задачи.

№ 17.

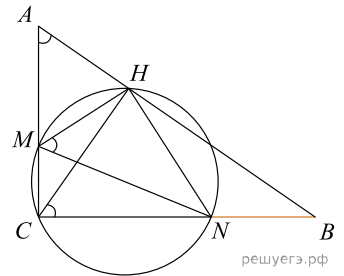
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а)Заметим, что сумма углов MHN и MCN равна 180° , поэтому четырехугольник $CMHN$ вписан в окружность. Углы HMN и HCN равны как вписанные. Углы HCN и CAB равны, потому что каждый из них равен $90^\circ - \angle ABC$. Таким образом, треугольники HMN и CAB подобны по двум углам. Что и требовалось доказать.

б)Заметим, что $\angle CMH = 180^\circ - \angle CNH = \angle BNH$, а $\angle MCH = 90^\circ - \angle A = \angle B$. Поэтому треугольники CMH и BNH подобны по двум углам, причем из пункта а) следует, что

$$\frac{CM}{BN} = \frac{MH}{HN} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Из этой цепочки равенств получаем, что $BN = 2$.



Ответ: 2.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Запишем систему в виде:

$$\begin{cases} y = 4x + a, & (1) \\ |y| = x(x - 2). & (2) \end{cases}$$

График первого уравнения — прямая с угловым коэффициентом 4, проходящая через точку $(0; a)$. График второго уравнения представляет собой две симметричные относительно оси абсцисс части парабол $y = x(x-2)$ и $y = -x(x-2)$, заданных на объединении лучей $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

1. При $4 \cdot 2 + a \leq 0$, то есть при $a \leq -8$, прямая (1) имеет с нижней частью графика уравнения (2) ровно две точки пересечения. Чтобы прямая не имела общих точек с верхней частью графика, уравнение

$$4x + a = x(x-2) \Leftrightarrow x^2 - 6x - a = 0$$

не должно иметь решений при $x > 2$. Это достигается при отрицательном дискриминанте полученного уравнения:

$$9 + a < 0 \Leftrightarrow a < -9.$$

С учетом условия $a \leq -8$ получаем, что при $a < -9$ система имеет ровно два решения.

2. Если $4 \cdot 2 + a > 0$ и $4 \cdot 0 + a < 0$ то есть $-8 < a < 0$, то прямая имеет ровно одну точку пересечения с нижней частью графика уравнения (2) и ровно одну точку пересечения с верхней частью графика, то есть исходная система имеет ровно два решения.

3. При $4 \cdot 0 + a \geq 0$, то есть при $a \geq 0$, прямая имеет ровно две точки пересечения с верхней частью графика уравнения (2). Чтобы прямая не имела общих точек с нижней частью графика, уравнение

$$4x + a = -x(x-2) \Leftrightarrow x^2 + 2x + a = 0.$$

не должно иметь решений при $x < 0$. Это достигается при отрицательном дискриминанте полученного уравнения:

$$1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1.$$

С учетом условия $a \geq 0$ получаем, что при $a > 1$ система имеет ровно два решения.

Итак, исходная система имеет два решения при $a \in (-\infty; -9) \cup (-8; 0) \cup (1; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -9) \cup (-8; 0) \cup (1; +\infty)$.

Приведем аналитическое решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} y = 4x + a, \\ |y| = x^2 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x + a, \\ |4x + a| = x^2 - 2x. \end{cases}$$

Из уравнения $y = 4x + a$ получаем, что каждому значению x , удовлетворяющему системе, соответствует ровно одно значение y . Поэтому количество решений системы совпадает с количеством корней уравнения $|4x + a| = x^2 - 2x$. Рассмотрим два случая раскрытия модуля.

Случай 1. Если $4x + a \geq 0$, то

$$x^2 - 6x - a = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{9 + a}.$$

Для найденных корней неравенство $4x + a \geq 0$ принимает вид

$$12 \pm 4\sqrt{9 + a} + a \geq 0.$$

Решим это неравенство. Пусть $t = \sqrt{9 + a}$, $t \geq 0$, тогда:

$$3 \pm 4t + t^2 \geq 0 \Leftrightarrow (t \pm 2)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (t+1)(t+3) \geq 0, \\ (t-1)(t-3) \geq 0. \end{cases}$$

Используя метод интервалов и условие на ОДЗ, получаем: либо а) $t \geq 0$, что при возвращении к исходной переменной даёт

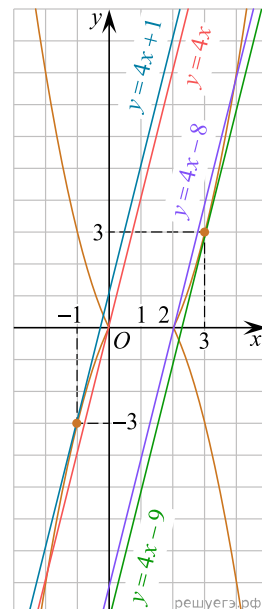
$$\sqrt{9 + a} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq -9,$$

либо б):

$$\begin{cases} 0 \leq \sqrt{9 + a} \leq 1, \\ \sqrt{9 + a} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 9 + a \leq 1, \\ 9 + a \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq a \leq -8, \\ a \geq 0. \end{cases}$$

Случай 2. При $4x + a < 0$, раскрывая модуль, получаем уравнение $x^2 + 2x + a = 0$, решениями которого являются $x = -1 \pm \sqrt{1 - a}$. Для найденных решений неравенство $4x + a < 0$ принимает вид

$$-4 \pm 4\sqrt{1 - a} + a < 0.$$



Положим, $t = \sqrt{1-a}$, $t \geq 0$, тогда

$$-3 \pm 4t - t^2 < 0 \Leftrightarrow (t \pm 2)^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t-3) \geq 0, \\ (t+1)(t+3) \geq 0. \end{cases}$$

Используя метод интервалов и условие на ОДЗ, получаем: либо а)

$$\begin{cases} 0 \leq \sqrt{1-a} < 1, \\ \sqrt{1-a} > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 1-a < 1, \\ 1-a > 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \leq 1, \\ a < -8, \end{cases}$$

либо б): $t \geq 0$, что при возвращении к исходной переменной даёт

$$\sqrt{1-a} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1.$$

Теперь рассмотрим все возможные значения параметра a и количество решений, которые система будет иметь при каждом отдельно взятом значении:

При $a < -9$ два решения — случаи 2а) и 2б).

При $a = -9$ три решения — случаи 2а) и 2б) и совпадающие корни из случаев 1а) и 1б).

При $-9 < a < -8$ по два решения из каждого пункта, итого четыре решения.

При $a = -8$ три решения — случаи 1а), 1б) и 2б).

При $-8 < a < 0$ два решения — случаи 1а) и 2б).

При $a = 0$ три решения — случаи 1а), 1б) и 2б).

При $0 < a < 1$ по два решения из каждого пункта, итого четыре решения.

При $a = 1$ три решения — случаи 1а) и 1б) и совпадающие корни из случаев 2а) и 2б).

При $a > 1$ два решения — случаи 1а) и 1б).

Итак, два решения система имеет при $a \in (-\infty; -9) \cup (-8; 0) \cup (1; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Например, годится такая прогрессия: $\frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{24}$.

б) Например, годится такая прогрессия: $\frac{1}{24}; \frac{1}{30}; \frac{1}{40}; \frac{1}{60}; \frac{1}{120}$.

в) Ясно, что последовательность $\frac{k}{k!}; \frac{k-1}{k!}; \dots; \frac{1}{k!}$ является арифметической прогрессией с разностью $-\frac{1}{k!}$. Кроме того, каждый член такой последовательности можно сократить так, чтобы в числителе была единица. Значит, все они являются членами исходной последовательности.