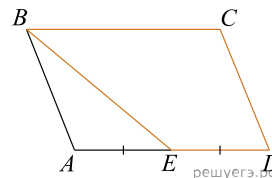


Вариант 130

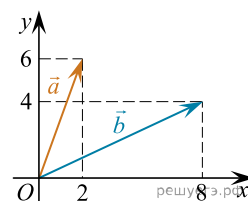
№ 1.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24. Точка E — середина стороны AD . Найдите площадь трапеции $BCDE$.



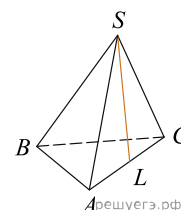
№ 2.

Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.



№ 3.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка L — середина ребра AC , S — вершина. Известно, что $BC = 6$, а $SL = 5$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.



№ 4.

Перед началом футбольного матча судья бросает монетку, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

№ 5.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

№ 6.

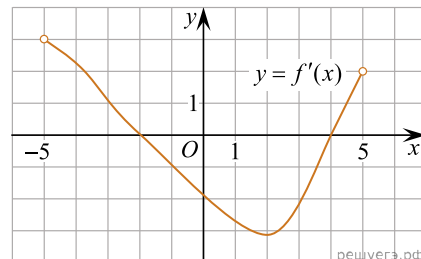
Найдите корень уравнения $6^{12,5x+2} = \frac{1}{216}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\log_5 7 \cdot \log_7 25$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



№ 9.

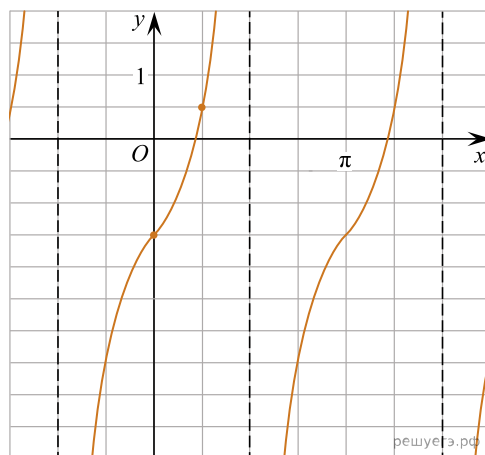
Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) — давление газа, V — объем газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в два раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

№ 10.

Первая труба пропускает на 1 литр воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 110 литров она заполняет на 1 минуту дольше, чем вторая труба?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \tan x + b$. Найдите a .



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M, N, K делят ребра AA_1, BB_1, DD_1 в отношении 1:4, 1:5, 1:3, считая от нижнего основания $ABCD$.

а) Докажите, что плоскость MNK делит ребро CC_1 в отношении 13:47, считая от нижнего основания.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, если сторона основания равна $\sqrt{13}$, а высота равна 60.

№ 15.

Решите неравенство: $3^x + \frac{243}{3^x - 36} \geq 0$.

№ 16.

Ольга хочет взять в кредит 100000 рублей под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 тысяч рублей?

№ 17.

К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM:MB = 1:3$?

№ 18.

Найдите все возможные значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |2x + 3y| + |2x - 3y| = 7, \\ x^2 + y^2 = a^2 - 4 - 4y \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 19.

Из каждого четырёхзначного числа вычли сумму его цифр и полученный результат разделили на 99.

а) Могло ли получиться число 65?

б) Могло ли получиться число 15?

в) Сколько различных натуральных чисел могло получиться?

Ответы

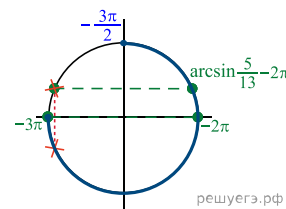
Номер	Задание	Ответ
1	665285	18
2	27735	45
3	921	45
4	320183	0,375
5	320172	0,52
6	510936	-0,4
7	505097	2
8	526007	4
9	27992	2
10	26597	10
11	509137	2
12	77421	-54

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\frac{13 \sin^2 x - 5 \sin x}{13 \cos x + 12} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x \left(\sin x - \frac{5}{13} \right)}{\cos x + \frac{12}{13}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{5}{13}, \\ \sin x = 0, \\ \cos x \neq -\frac{12}{13}, \end{cases}$$



откуда $x = \arcsin \frac{5}{13} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа $-3\pi; -2\pi; \arcsin \frac{5}{13} - 2\pi$.

Ответ: а) $\arcsin \frac{5}{13} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -2\pi; \arcsin \frac{5}{13} - 2\pi$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть плоскость MNK пересекает ребро CC_1 в точке L , O — точка пересечения LM и NK (середина диагоналей LM и NK параллелограмма $KLNM$), и пусть высота пирамиды равна h . Построим отрезок NR параллельно BD , где точка R лежит на ребре DD_1 и отрезок MS параллельно отрезку AC , где точка S лежит на ребре CC_1 . Пусть точки O_1 и O_2 — середины NR и MS , соответственно. Заметим, что OO_1 и OO_2 — средние линии треугольников NRK и MSL , соответственно. Тогда:

$$DR = BN = \frac{h}{6},$$

$$CS = AM = \frac{h}{5},$$

$$DK = \frac{h}{4},$$

$$KR = DK - DR = \frac{h}{12},$$

$$OO_1 = \frac{1}{2}KR = \frac{h}{24},$$

$$O_2O_1 = AM - BN = \frac{h}{30},$$

$$OO_2 = OO_1 - O_2O_1 = \frac{h}{120},$$

$$SL = 2OO_2 = \frac{h}{60},$$

$$CL = CS + SL = \frac{13h}{60},$$

$$LC_1 = CC_1 - CL = \frac{47h}{60},$$

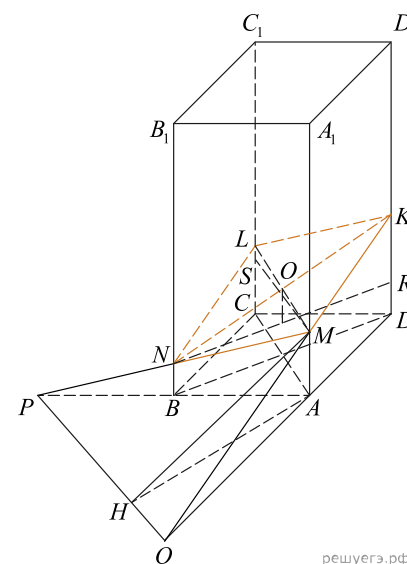
$$\text{откуда } \frac{CL}{LC_1} = \frac{13}{47}.$$

б) Пусть P — точка пересечения прямых AB и MN , а точка Q — AD и KM . Тогда прямая PQ — общая прямая плоскостей ABC и MNK . Из точки M опустим перпендикуляр MH на прямую PQ . По теореме о трех перпендикулярах его проекция AH также перпендикулярна PQ , следовательно, угол MHA — линейный угол искомого угла.

Из пункта а) следует: $BN = 10$, $AM = 12$, $DK = 15$. Треугольники QAM и QDK — подобны, следовательно,

$$\frac{QA}{QD} = \frac{QA}{QA + AD} = \frac{AM}{DK} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow QA = 4\sqrt{13}.$$

Аналогично, треугольники PBN и PAM подобны, следовательно,



решуегэ.рф

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PB}{PB+AB} = \frac{BN}{AM} = \frac{5}{6},$$

откуда $PB = 5\sqrt{13},$

$$PA = 6\sqrt{13},$$

$$PQ = \sqrt{PA^2 + QA^2} = 26,$$

$$AH = \frac{AP \cdot AQ}{PQ} = 12.$$

Находим: $\operatorname{tg} \angle MHA = \frac{AM}{AH} = 1,$ откуда $\angle MHA = 45^\circ.$

Ответ: б) $45^\circ.$

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 2 и / или 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t + \frac{243}{t - 36} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - 36t + 243}{t - 36} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t - 9)(t - 27)}{t - 36} \geq 0,$$

откуда $9 \leq t \leq 27$ или $t > 36$. При $9 \leq t \leq 27$ получим: $9 \leq 3^x \leq 27$, откуда $2 \leq x \leq 3$. При $t > 36$ получим: $3^x > 36$, откуда $x > \log_3 36$. Решение исходного неравенства: $2 \leq x \leq 3$ и $x > \log_3 36$.

Ответ: $[2; 3] \cup (\log_3 36; +\infty).$

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Чтобы количество лет было минимальным необходимо, чтобы размер выплат был максимальным. Поэтому ежегодные выплаты должны составлять 24тыс.руб. Тогда в конце года оставшаяся сумма долга умножается на величину 1,1, а после начисления процентов долг уменьшается на 24 тыс. руб. Составим таблицу выплат.

Год	Долг банку (руб.)	Остаток доли после выплаты (руб.)
	100000	
1	110000	86000
2	94600	70600
3	77660	53660
4	59026	35026
5	38528,6	14528,6
6	15981,46	0

Ольга погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

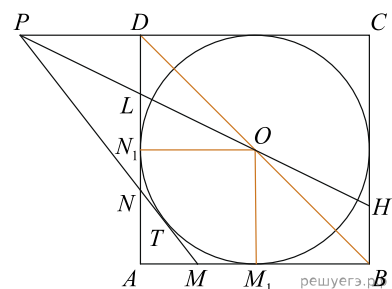
Решение. а) Пусть окружность, вписанная в квадрат, касается его стороны AB в точке M_1 , стороны AD — в точке N_1 , а прямой MN — в точке T . По свойству касательных $NN_1 = NT$, $MM_1 = MT$ и $AN_1 = AM_1$. Тогда

$$\begin{aligned}
 AM + MN + AN &= AM + MT + NT + AN = (AM + MM_1) + (NN_1 + AN) = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB. \\
 AM + MN + AN &= AM + MT + NT + AN = \\
 &= (AM + MM_1) + (NN_1 + AN) = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB. \quad AM + MN + AN = AM + MT + NT + AN = \\
 &= (AM + MM_1) + (NN_1 + AN) = \\
 &= \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AD = AB.
 \end{aligned}$$

б) Положим $AB = 12a$, $TN = NN_1 = x$. Тогда

$$AM = 3a,$$

$$AN = AN_1 - NN_1 = 6a - x,$$



$$MN = MT + TN = 3a + x.$$

По теореме Пифагора $AM^2 + AN^2 = MN^2$, то есть

$$9a^2 + (6a - x)^2 = (3a + x)^2.$$

Отсюда находим, что $x = 2a$. Тогда $AN = 4a$ и $MN = 5a$.

Пусть точка O — центр окружности, а прямая PO пересекает стороны AD и BC в точках L и H соответственно. Из равенства треугольников DOL и BOH следует, что $DL = BH$, поэтому $\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA}$. Окружность вписана в угол MPC , значит, PL — биссектриса треугольника DPN , который подобен треугольнику AMN . Используя свойство биссектрисы и подобия, находим:

$$\frac{DL}{LN} = \frac{PD}{PN} = \frac{AM}{MN} = \frac{3}{5},$$

откуда $DL = \frac{3}{8}DN$. Учитывая, что

$$DN = DA - AN = 12a - 4a = 8a,$$

находим, что $DL = 3a$, $LA = 9a$. Тогда

$$\frac{BH}{HC} = \frac{DL}{LA} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: б) 1 : 3.

Приведем решение пункта б) предложенное нашим читателем Дмитрием.

Часть б) можно решить проще, доказав, что $\triangle OHB = \triangle OMA$. Оттуда сразу следует, что $MA = HB$ при любом положении точки M . Действительно, $OB = OA$, $\angle OAM = \angle OBH = 45^\circ$, а $\angle MPC = \angle TOM_1$ — угол между касательными и соответствующими им радиусами. Далее, PH — биссектриса $\angle MPC$, OM — биссектриса $\angle TOM_1$. Следовательно,

$$\angle HPC = \angle MOM_1, \angle PHC = \angle OMM_1, \angle OHB = \angle OMA, \angle BOH = \angle AOM. \angle HPC = \angle MOM_1, \angle PHC = \angle OMM_1, \angle OHB = \angle OMA, \angle BOH = \angle AOM.$$

Треугольники OHB и OMA равны по второму признаку.

Приведем решение пункта б) Максима Волкова.

Пусть O — центр окружности, T — точка касания окружности и прямой MN . Положим $AB = 12a$, тогда радиус окружности $R = 6a$, $MT = MM_1 = 3a$. Положим $\alpha = \angle MOT$, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MT}{OT} = \frac{3a}{6a} = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что PO и MO — биссектрисы внутренних односторонних углов, образованных при пересечении параллельных прямых AB и PC секущей MN . Следовательно, $\angle MOP = 90^\circ$, тогда

$$\angle CPO = \angle MPO = \angle MOT = \alpha.$$

Пусть F — точка касания окружности со стороной CD , тогда в треугольнике POF находим: $OF = PF \operatorname{tg} \alpha$, откуда $PF = 12a$. Далее,

$$PC = 12a + 6a = 18a,$$

а потому из треугольника PHC находим: $CH = PC \operatorname{tg} \alpha = 9a$. Следовательно,

$$PC = 12a - 9a = 3a.$$

Тогда

$$\frac{BH}{HC} = \frac{3a}{9a} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: б) 1 : 3.

Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Чтобы построить график первого уравнения системы, используем метод областей: построим прямые $2x + 3y = 0$ и $2x - 3y = 0$, они разбивают координатную плоскость на четыре области, в каждой из которых стоящие под знаком модуля выражения сохраняют знак. Взяв пробные точки в полученных областях, снимаем знаки модулей:

— в области 1 выберем точку с координатами $(1; 0)$, получаем:

$$2x + 3y + 2x - 3y = 7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4};$$

— в области 2 выберем точку с координатами $(0; 1)$, получаем:

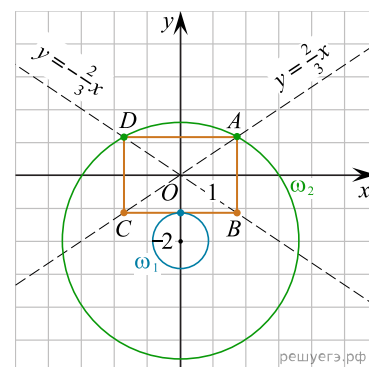
$$2x + 3y - (2x - 3y) = 7 \Leftrightarrow y = \frac{7}{6};$$

— в области 3 выберем точку с координатами $(-1; 0)$, получаем:

$$-(2x + 3y) - (2x - 3y) = 7 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{4};$$

— в области 4 выберем точку с координатами $(0; -1)$, получаем:

$$-(2x + 3y) + 2x - 3y = 7 \Leftrightarrow y = -\frac{7}{6}.$$



Следовательно, графиком уравнения $|2x + 3y| + |2x - 3y| = 7$ является прямоугольник с вершинами в точках

$$A\left(\frac{7}{4}; \frac{7}{6}\right),$$

$$B\left(\frac{7}{4}; -\frac{7}{6}\right),$$

$$C\left(-\frac{7}{4}; -\frac{7}{6}\right)$$

$$\text{и } D\left(-\frac{7}{4}; \frac{7}{6}\right).$$

Графиком второго уравнения

$$x^2 + y^2 = a^2 - 4 - 4y \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 = a^2$$

является окружность с центром в точке $(0; -2)$ радиусом $r = |a|$, при $a = 0$ вырождающаяся в точку. Система имеет решения тогда и только тогда, когда прямоугольник $ABCD$ и окружность имеют общие точки. При $|a| = \frac{5}{6}$ окружность ω_1 (выделена синим) касается стороны BC в точке $\left(0; -\frac{7}{6}\right)$. Окружность ω_2 (выделена зелёным) проходит через точки A и D при условии

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(2 + \frac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{19}{6}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{49}{16} + \frac{361}{36}} = \sqrt{\frac{49 \cdot 9 + 361 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 9}} = \frac{\sqrt{1885}}{12}.$$

Таким образом, система имеет решения при

$$\frac{5}{6} \leq |a| \leq \frac{\sqrt{1885}}{12} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\sqrt{1885}}{12} \leq a \leq -\frac{5}{6}, \\ \frac{5}{6} \leq a \leq \frac{\sqrt{1885}}{12}. \end{cases}$$

При прочих значениях параметра a система решений не имеет.

Ответ: $\left[-\frac{\sqrt{1885}}{12}; -\frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; \frac{\sqrt{1885}}{12}\right]$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть цифры числа— это a, b, c и d , тогда число равно $1000a + 100b + 10c + d$, после вычитания суммы цифр получим $999a + 99b + 9c$, а после деления на 99 получим:

$$10a + b + \frac{9a + 9c}{99} = 10a + b + \frac{a + c}{11}.$$

Чтобы это число было натуральным, необходимо и достаточно, чтобы $a + c$ делилось на 11. Поскольку

$$a + c \geq a > 0$$

и

$$a + c \leq 9 + 9 = 18 < 22,$$

это выполнено лишь при $a + c = 11$. Значит, результат деления равен $10a + b + 1$. Заметим сразу, что результат деления не зависит от цифры d .

а) Да, например, если $a = 6, b = 4$. Тогда $c = 5$, а цифра d произвольная. Итак, подойдет, например, число 6450.

б) Нет. Выражение $10a + b + 1 = 15$ при условии $a \geq 1$ и $b \geq 0$ дает $a = 1$. Значит, $c = 10$, что невозможно.

в) Заметим, что при $a = 1, c = 10$, что невозможно, а при остальных $a \in [2; 9]$ получаем возможное значение c . Значит, есть 8 вариантов выбора a и независимо от них 10 вариантов выбора b , что дает 80 различных двузначных чисел $\overline{ab} = 10a + b$. Поэтому есть 80 возможных ответов — от 21 до 100.

Ответ: а) да; б) нет; в) 80.