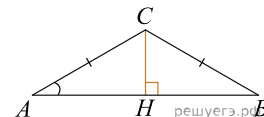


Вариант 131

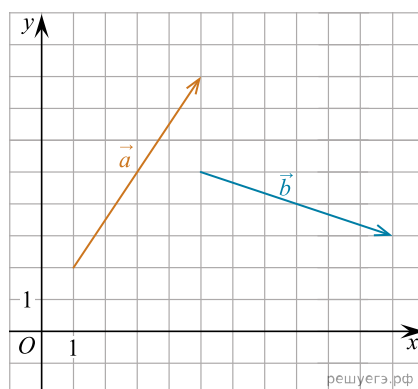
№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC = 8$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .



№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



№ 3.

Кусок льда представляет собой правильную шестиугольную призму высотой 18 см. Его планируют расплавить и вновь заморозить так, чтобы получилась правильная треугольная призма, сторона основания которой в 2 раза больше стороны основания исходной. Чему будет равна её высота? Ответ дайте в сантиметрах.

№ 4.

Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 4, но не дойдя до отметки 7 часов.

№ 5.

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,52. Если А. играет черными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,3. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

№ 6.

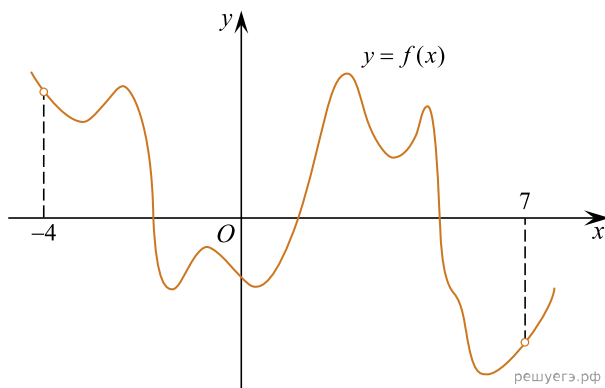
Найдите корень уравнения $5^{x-7} = \frac{1}{125}$.

№ 7.

Найдите $2\cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,7$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих интервалу $(-4; 7)$.

**№ 9.**

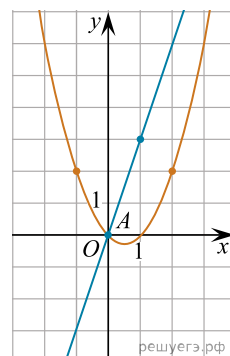
Груз массой $0,08\text{ кг}$ колеблется на пружине. Его скорость u меняется по закону $v = v_0 \sin \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=12\text{ с}$ — период колебаний, $v_0 = 0,5\text{ м/с}$. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, u — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

№ 10.

Два промышленных фильтра, работая одновременно, очищают цистерну воды за 30 минут. Определите, за сколько минут второй фильтр очистит цистерну воды, работая отдельно, если известно, что он сделает это на 25 минут быстрее, чем первый.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

**№ 12.**

Найдите наибольшее значение функции $y = 14x - 7\operatorname{tg} x - 3,5\pi + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0$.
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.
-

№ 14.

Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с основанием $ABCD$. Плоскость α проходит через ребро AB и пересекает ребра SC и SD в точках M и N соответственно. Известно, что $AB = AN = BM = 5MN$.

- а) Докажите, что $SM : MC = SN : ND = 1 : 4$.
- б) Найдите косинус угла между плоскостью α и плоскостью основания пирамиды.
-

№ 15.

Решите неравенство $2 \cdot \frac{125^x - 1}{5^x - 1} + \frac{12}{25^x + 5^x + 1} \leq 11$.

№ 16.

- 15 января Пётр берёт кредит в банке на 6 месяцев в размере 600 тысяч рублей. Его условия таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 50% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца с февраля по июнь долг должен быть на t тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца, где $0 \leq t \leq 40$;
 - 15 июля кредит должен быть полностью погашен.
- Какую наибольшую и наименьшую сумму может выплатить Пётр за всё время погашения кредита?
-

№ 17.

Из вершины тупого угла C треугольника ABC проведена высота CH . Окружность с центром H и радиусом HC второй раз пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно, а прямая CH — эту окружность в точке D .

- а) Докажите, что угол MDN равен сумме углов A и B треугольника ABC .
- б) Найдите отношение MN к AB , если известно, что $CM : MA = 2 : 25$ и $CN : NB = 2 : 1$.
-

№ 18.

Найдите наибольшее значение параметра a , при котором уравнение

$$ax^2 = |2x - 1|\sqrt{2x - 1} + |x - 1|\sqrt{4x - 1}$$

имеет хотя бы один корень, и укажите корни этого уравнения для такого значения a .

№ 19.

Егор делит линейку на части. За одно действие он может отрезать от любого количества линеек равные части, имеющие целую длину.

- Может ли Егор за 4 хода разделить линейку длиной в 16 см на части по 1 см?
- Может ли Егор за 5 ходов разделить линейку длиной в 100 см на части по 1 см?
- За какое наименьшее количество ходов Егор может разделить линейку длиной в 300 см на части по 1 см?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27286	8
2	644849	12
3	639940	27
4	510381	0,25
5	319355	0,156
6	26651	4
7	689079	0,04
8	523394	5
9	28012	0,0025
10	509420	50
11	642407	4
12	26709	4

№ 13.

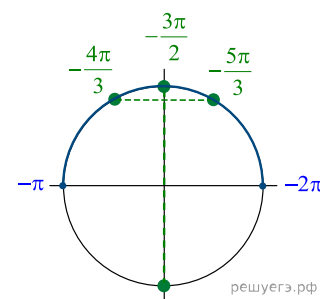
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) &= \sqrt{3} \cos(2\pi - x) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -2 \cos x \cdot (-\sin x) &= \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow \cos x \cdot (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \sqrt{3} \cos(2\pi - x) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -2 \cos x \cdot (-\sin x) &= \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \cos x \cdot (2 \sin x - \sqrt{3}) &= 0 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0; \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.
Получим числа $-\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{4\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Основанием правильной четырехугольной пирамиды является квадрат, значит, ребра AB и DC параллельны, а потому и плоскость AMN параллельна ребру DC . Следовательно, лежащая в плоскости прямая MN также параллельна ребру DC . Тогда треугольники SNM и SDC подобны по двум углам с коэффициентом $\frac{1}{5}$. Таким образом, $SN:SD=1:5$, а потому $SN:ND=1:4$. Поскольку боковые ребра правильной пирамиды равны, $SM:MC=1:4$.

б) Пусть $MN=x$ и $SM=y$, тогда $MC=4y$ и $AB=AN=BM=5x$, и пусть точки K, P и Q — середины отрезков AB, MN и DC соответственно.

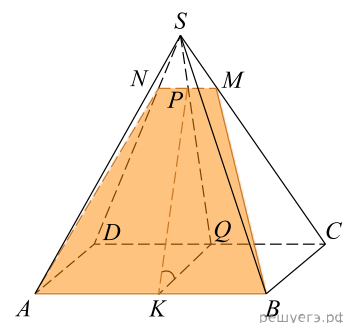
Рассмотрим прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен PK , а гипотенуза равна BM . Тогда второй катет такого треугольника будет равен $BK-MP$. Аналогично получается прямоугольный треугольник с катетами $PQ, QC-PM$ и гипотенузой MC . Применим к обоим фигурам теорему Пифагора:

$$PK^2 = BM^2 - (BK - MP)^2 = (5x)^2 - \left(\frac{5x}{2} - \frac{x}{2} \right)^2 = 21x^2,$$

$$PQ^2 = MC^2 - (QC - PM)^2 = (4y)^2 - \left(\frac{5x}{2} - \frac{x}{2} \right)^2 = 16y^2 - 4x^2.$$

Косинус искомого угла равен косинусу угла между прямыми, перпендикулярными линии пересечения этих плоскостей, то есть $\cos \angle PKQ$ — искомый. Воспользуемся теоремой косинусов в треугольнике PKQ :

$$\cos \angle PKQ = \frac{PK^2 + KQ^2 - PQ^2}{2 \cdot PK \cdot KQ} = \frac{21x^2 + 25x^2 - 16y^2 + 4x^2}{2 \cdot \sqrt{21}x \cdot 5x} = \frac{50x^2 - 16y^2}{10\sqrt{21}x^2}. \cos \angle PKQ = \frac{PK^2 + KQ^2 - PQ^2}{2 \cdot PK \cdot KQ} =$$



$$= \frac{21x^2 + 25x^2 - 16y^2 + 4x^2}{2 \cdot \sqrt{21}x \cdot 5x} = \frac{50x^2 - 16y^2}{10\sqrt{21}x^2}.$$

В равнобедренном треугольнике SBC найдем косинус угла SCB :

$$\cos \angle SCB = \frac{25x^2 + 25y^2 - 25y^2}{2 \cdot 5x \cdot 5y} = \frac{25x^2}{50xy} = \frac{x}{2y}.$$

Косинус этого же угла выразим из треугольника MBC :

$$\cos \angle SCB = \frac{16y^2 + 25x^2 - 25x^2}{2 \cdot 5x \cdot 4y} = \frac{16y^2}{40xy} = \frac{2y}{5x}.$$

Приравняем полученные значения:

$$\frac{x}{2y} = \frac{2y}{5x} \Leftrightarrow 5x^2 = 4y^2 \Leftrightarrow x^2 = 0,8y^2.$$

Наконец, подставим в выражение для косинуса искомого угла:

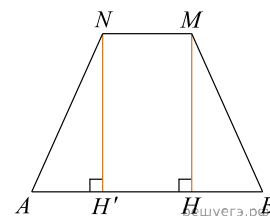
$$\cos \angle PKQ = \frac{40y^2 - 16y^2}{\sqrt{21} \cdot 8y^2} = \frac{24y^2}{\sqrt{21} \cdot 8y^2} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Приведем другое решение пункта б) Александра Турбанова (Липецк)

Пусть $MN = x$, опустим на основание равнобедренной трапеции $ANMB$ две высоты — MH и NH . Тогда $BH = AH = 2x$. Из прямоугольного треугольника BMH по теореме Пифагора $MH = \sqrt{21}x$. Следовательно, площадь трапеции равна

$$S_{ANMB} = \frac{MN + AB}{2} \cdot MH = 3x \cdot \sqrt{21}x = 3\sqrt{21}x^2.$$



Спроектируем трапецию $ANMB$ на плоскость основания и получим равнобедренную трапецию $AN'MB$, диагонали которой перпендикулярны. Значит, ее площадь равна половине произведения диагоналей, то есть

$$S_{AN'M'B} = \frac{1}{2} \cdot BN' \cdot AM' = \frac{1}{2} \cdot (3x\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot 18x^2 = 9x^2.$$

Площадь ортогональной проекции трапеции на плоскость равна площади этой трапеции, умноженной на косинус угла между плоскостями трапеции и ее проекции, а потому

$$\cos \alpha = \frac{S_{AN'M'B}}{S_{ANMB}} = \frac{9x^2}{3\sqrt{21}x^2} = \frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $\log_5 \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ и/или $\log_5 \frac{\sqrt{13}-1}{2}$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Запишем исходное неравенство в виде:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{125^x - 1}{5^x - 1} + \frac{12}{25^x + 5^x + 1} &\leq 11 \Leftrightarrow \frac{2(5^x - 1)(25^x + 5^x + 1)}{5^x - 1} + \frac{12}{25^x + 5^x + 1} \leq 11 \Leftrightarrow_{x \neq 0} \\
&\Leftrightarrow 2(25^x + 5^x + 1) + \frac{12}{25^x + 5^x + 1} \leq 11 \cdot 2 \cdot \frac{125^x - 1}{5^x - 1} + \frac{12}{25^x + 5^x + 1} \leq 11 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{2(5^x - 1)(25^x + 5^x + 1)}{5^x - 1} + \frac{12}{25^x + 5^x + 1} \leq 11 \Leftrightarrow_{x \neq 0} \\
&\Leftrightarrow 2(25^x + 5^x + 1) + \frac{12}{25^x + 5^x + 1} \leq 11.
\end{aligned}$$

Введем замену $t = 25^x + 5^x + 1$, $t > 0$. Имеем:

$$2t + \frac{12}{t} \leq 11 \Leftrightarrow 2t^2 - 11t + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (2t - 3)(t - 4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq \frac{3}{2}, \\ t \leq 4. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной. Решение неравенства $25^x + 5^x + 1 \geq \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
25^x + 5^x + 1 &\geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(5^x)^2 + 2 \cdot 5^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(5^x + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \left(5^x - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) &\geq 0 \Leftrightarrow 5^x \geq \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \quad 25^x + 5^x + 1 \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(5^x)^2 + 2 \cdot 5^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(5^x + \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right) \left(5^x - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 5^x \geq \frac{\sqrt{3} - 1}{2},
\end{aligned}$$

откуда $x \geq \log_5 \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)$.

Решение неравенства $25^x + 5^x + 1 \leq 4$:

$$\begin{aligned}
25^x + 5^x + 1 &\leq 4 \Leftrightarrow (5^x)^2 + 5^x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(5^x + \frac{\sqrt{13} + 1}{2}\right) \left(5^x - \frac{\sqrt{13} - 1}{2}\right) &\leq 0 \Leftrightarrow 5^x \leq \frac{\sqrt{13} - 1}{2}, \quad 25^x + 5^x + 1 \leq 4 \Leftrightarrow (5^x)^2 + 5^x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(5^x + \frac{\sqrt{13} + 1}{2}\right) \left(5^x - \frac{\sqrt{13} - 1}{2}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 5^x \leq \frac{\sqrt{13} - 1}{2},
\end{aligned}$$

откуда $x \leq \log_5 \left(\frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right)$.

Учитывая условие $x \neq 0$, получаем решение неравенства: $\left[\log_5 \frac{\sqrt{3} - 1}{2}; 0 \right) \cup \left(0; \log_5 \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right]$.

Ответ: $\left[\log_5 \frac{\sqrt{3} - 1}{2}; 0 \right) \cup \left(0; \log_5 \frac{\sqrt{13} - 1}{2} \right]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть 15 февраля долг будет меньше долга на 15 января на t_1 тыс. руб., 15 марта — меньше долга на 15 февраля на t_2 тыс. руб. и т. д. Заполним таблицу.

Месяц	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
Январь			600
Февраль	$1,5 \cdot 600$	$300 + t_1$	$600 - t_1$
Март	$1,5 \cdot (600 - t_1)$	$300 - 0,5t_1 + t_2$	$600 - t_1 - t_2$
Апрель	$1,5 \cdot (600 - t_1 - t_2)$	$300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 + t_3$	$600 - t_1 - t_2 - t_3$
Май	$1,5 \cdot (600 - t_1 - t_2 - t_3)$	$300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 + t_4$	$600 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4$
Июнь	$1,5 \cdot (600 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4)$	$300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 - 0,5t_4 + t_5$	$600 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5$
Июль	$1,5 \cdot (600 - t_1 - t_2 - t_3 - t_4 - t_5)$	$900 - 1,5t_1 - 1,5t_2 - 1,5t_3 - 1,5t_4 - 1,5t_5$	0

Суммируем все выплаты:

$$\begin{aligned}
& 300 + t_1 + 300 - 0,5t_1 + t_2 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 + t_3 + 300 - 0,5t_1 - \\
& - 0,5t_2 - 0,5t_3 + t_4 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 - 0,5t_4 + t_5 + 900 - 1,5t_1 - \\
& - 1,5t_2 - 1,5t_3 - 1,5t_4 - 1,5t_5 = 2400 - 2,5t_1 - 2t_2 - 1,5t_3 - t_4 - 0,5t_5. \quad 300 + t_1 + 300 - 0,5t_1 + t_2 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 + \\
& + t_3 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 + t_4 + 300 - 0,5t_1 - \\
& - 0,5t_2 - 0,5t_3 - 0,5t_4 + t_5 + 900 - 1,5t_1 - 1,5t_2 - 1,5t_3 - \\
& - 1,5t_4 - 1,5t_5 = 2400 - 2,5t_1 - 2t_2 - 1,5t_3 - t_4 - 0,5t_5. \quad 300 + t_1 + 300 - 0,5t_1 + t_2 + 300 - 0,5t_1 - \\
& - 0,5t_2 + t_3 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 + \\
& + t_4 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - 0,5t_3 - 0,5t_4 + \\
& + t_5 + 900 - 1,5t_1 - 1,5t_2 - 1,5t_3 - 1,5t_4 - \\
& - 1,5t_5 = 2400 - 2,5t_1 - 2t_2 - 1,5t_3 - t_4 - 0,5t_5. \quad 300 + t_1 + 300 - 0,5t_1 + t_2 + 300 - \\
& - 0,5t_1 - 0,5t_2 + t_3 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - \\
& - 0,5t_3 + t_4 + 300 - 0,5t_1 - 0,5t_2 - \\
& - 0,5t_3 - 0,5t_4 + t_5 + 900 - 1,5t_1 - \\
& - 1,5t_2 - 1,5t_3 - 1,5t_4 - 1,5t_5 = 2400 - \\
& - 2,5t_1 - 2t_2 - 1,5t_3 - t_4 - 0,5t_5.
\end{aligned}$$

При $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0$ полученная сумма максимальна, она равна 2400 тыс. руб. При $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 40$ сумма минимальна, она равна $2400 - 7,5 \cdot 40 = 2100$ тыс. руб.

Ответ: 2,4 млн руб. и 2,1 млн руб.

Приведём другое решение.

Различие в сумме выплат будет обусловлено начисляемыми процентами. Поэтому наибольшую сумму Пётр выплатит, если в первые пять месяцев он будет выплачивать только проценты за пользование кредитом, то есть если $t = 0$, а наименьшую — в случае ежемесячного максимального уменьшения долга, то есть если $t = 40$.

Приведем схему выплаты кредита для $t = 0$.

Месяц	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
Январь			600
Февраль	900	300	600
Март	900	300	600
Апрель	900	300	600
Май	900	300	600
Июнь	900	300	600
Июль	900	900	0

Сумма выплат в этом случае составит $300 \cdot 5 + 900 = 2400$ тыс. руб.
 Приведем схему выплаты кредита для $t = 40$.

Месяц	Долг на 1-е число месяца, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг на 15-е число месяца, тыс. руб.
Январь			600
Февраль	900	340	560
Март	840	320	520
Апрель	780	300	480
Май	720	280	440
Июнь	660	260	400
Июль	600	600	0

В этом случае сумма выплат равна

$$340 + 320 + 300 + 280 + 260 + 600 = 2100 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 2,4 млн руб. и 2,1 млн руб.

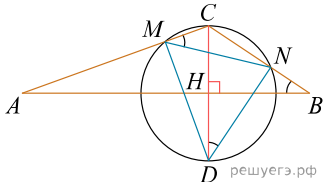
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Четырёхугольник $CMDN$ вписан в окружность, поэтому

$$\angle MDN = 180^\circ - \angle MCN = 180^\circ - \angle ACB = \angle CAB + \angle CBA.$$

б)Вписанные углы CMN и CDN опираются на одну и ту же дугу, поэтому $\angle CMN = \angle CDN$. У прямоугольных треугольников CND и CHB общий острый угол при вершине C , поэтому $\angle CBH = \angle CDN = \angle CMN$. Треугольник ABC подобен треугольнику NMC по



двум углам, значит, $\frac{CN}{AC} = \frac{CM}{BC}$.

Положим, $CN = 2a$, $NB = a$, $MA = 25b$, $CM = 2b$. Тогда $\frac{2a}{27b} = \frac{2b}{3a}$, следовательно, $\frac{a}{b} = 3$. Значит, коэффициент подобия треугольников ABC и NMC равен $\frac{CN}{AC} = \frac{2a}{27b} = \frac{2}{9}$.

Следовательно, $\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{AC} = \frac{2}{9}$.

Ответ: б) 2:9.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Уравнение определено при $x \geq \frac{1}{2}$. Рассмотрим векторы

$$\vec{m} = (|2x - 1|; \sqrt{4x - 1})$$

и

$$\vec{n} = (\sqrt{2x - 1}; |x - 1|),$$

и пусть α — угол между ними. Найдём длины этих векторов:

$$|\vec{m}| = \sqrt{|2x - 1|^2 + \sqrt{4x - 1}^2} = \sqrt{4x^2 - 4x + 1 + 4x - 1} = \sqrt{4x^2} = 2|x|,$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{\sqrt{2x - 1}^2 + |x - 1|^2} = \sqrt{2x - 1 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Тогда исходное уравнение имеет вид

$$\frac{a}{2} \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = \vec{m} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \frac{a}{2} \cdot |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow a = 2 \cos \alpha, \quad x \geq \frac{1}{2}$$

Таким образом, $a \leq 2$. Значение $a = 2$ может достигаться тогда и только тогда, когда $\cos \alpha = 1$, то есть в случае, когда векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены. Если соответствующие значения x существуют, то $a = 2$ — искомое наибольшее значение параметра, при котором уравнение имеет решения.

Выше было получено, что $|\vec{m}| = 2|\vec{n}|$. Следовательно, векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ сонаправлены, если координаты вектора $\vec{m}$ в 2 раза больше координат вектора $\vec{n}$, то есть при одновременном выполнении условий:

$$|2x - 1| = 2\sqrt{2x - 1},$$

$$\sqrt{4x - 1} = 2|x - 1|.$$

Решим уравнение $|2x - 1| = 2\sqrt{2x - 1}$:

$$|2x-1| = 2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 4(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0, \\ 2x-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ x=\frac{5}{2}. \end{cases} |2x-1| = 2\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 4(2x-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0, \\ 2x-1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ x=\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Подставляя найденные корни в уравнение $\sqrt{4x-1} = 2|x-1|$, убеждаемся, что они являются его решениями. Таким образом, при наибольшем возможном значении параметра a исходное уравнение имеет корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{5}{2}$.

Ответ: $a = 2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Первым ходом Егор отрежет от линейки 8 см и получит две линейки по 8 см. Вторым ходом отрежет от всех линеек 4 см и получит четыре линейки по 4 см. Третьим отрежет по 2 см и получит 8 линеек по 2 см. Последним, четвертым, ходом он отрежет по 1 см и получит 16 частей по 1 см.

б) Нет. За один ход Егор делит некоторое количество своих частей на две, поэтому каждым ходом общее количество частей увеличивается не более, чем в 2 раза. Следовательно, за 5 ходов Егор получит не более 32 частей, а необходимо получить 100 частей.

в) За восемь ходов Егор получит не более 256 частей, а необходимо получить 300 частей, поэтому восьми ходов не хватит. Покажем, как Егор может разделить линейку за девять ходов. Каждым ходом, кроме последнего, Егор отрезает указанную часть от всех имеющихся у него линеек. Последним ходом Егор отрезает 1 см только от линеек, длина которых больше одного сантиметра.

Ход	Было линеек	Отрезано	Стало линеек
1	300 см	150 см	2 по 150 см
2	2 по 150 см	75 см	4 по 75 см
3	4 по 75 см	37 см	4 по 37 см и 4 по 38 см
4	4 по 37 см и 4 по 38 см	19 см	12 по 19 см и 4 по 18 см
5	12 по 19 см и 4 по 18 см	9 см	20 по 9 см и 12 по 10 см
6	20 по 9 см и 12 по 10 см	5 см	44 по 5 см и 20 по 4 см
7	44 по 5 см и 20 по 4 см	2 см	84 по 2 см и 44 по 3 см
8	84 по 2 см и 44 по 3 см	1 см	212 по 1 см и 44 по 2 см

9	212 по 1 см и 44 по 2 см	1 см	300 по 1 см
---	--------------------------	------	-------------

Ответ: а) да, может; б) нет, не может; в) за 9 ходов.
