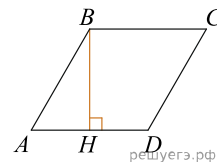


Вариант 132

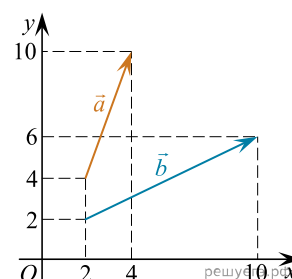
№ 1.

Найдите высоту ромба, сторона которого равна $\sqrt{3}$, а острый угол равен 60° .



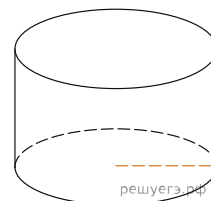
№ 2.

Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.



№ 3.

Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .



№ 4.

Игральную кость бросают два раза. Найдите вероятность того, что выпавшие значения совпадают. Ответ округлите до сотых.

№ 5.

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

№ 6.

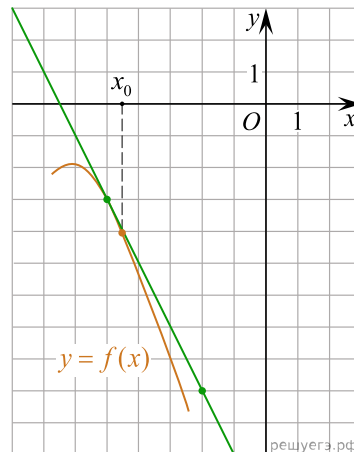
Найдите корень уравнения $\frac{1}{3x-4} = \frac{1}{4x-11}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{6^{\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}}}{42^{\sqrt{3}-1}}$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 9.

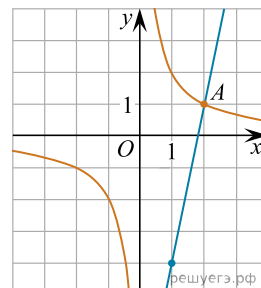
Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

№ 10.

Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = -14x + 7 \operatorname{tg} x + \frac{7\pi}{2} + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $2 \sin^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x = \sqrt{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

№ 14.

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания $AB=4$, а боковое ребро $AA_1=9$. Точка M — середина ребра AC , а на ребре AA_1 взята точка T так, что $AT = 5$.

а) Докажите, что плоскость BB_1M делит отрезок C_1T пополам.

б) Плоскость BTC_1 делит отрезок MB_1 на две части. Найдите длину меньшей из них.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{2^{x+1} - 7}{4^x - 2^{x+1} - 3} \leq 1$.

№ 16.

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Месяц и год	Июль 2026	Июль 2027	Июль 2028	Июль 2029	Июль 2030
Долг (в млн руб.)	S	$0,7S$	$0,4S$	$0,2S$	0

Найдите наименьшее значение S , при котором общая сумма выплат будет больше 10 млн рублей.

№ 17.

В окружности с центром O построен квадрат $KOFD$ так, что его вершина D лежит на окружности. Из точки B , диаметрально противоположной точке D , проведены две хорды AB и BC , проходящие через вершины K и F квадрата соответственно.

а) Докажите, что $AK : KB = 1 : 5$.

б) Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если радиус окружности равен 5.

№ 18.

Найдите все целые отрицательные значения параметра a , при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$ **не выполнено**.

№ 19.

Дано натуральное трехзначное число n , в записи которого нет нулей. Для этого числа составим дробь $f(n)$, в числителе которой само число n , а в знаменателе — произведение всех цифр числа.

а) Приведите пример такого числа n , для которого $f(n) = \frac{119}{24}$.

б) Существует ли такое n , что $f(n) = \frac{125}{24}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $f(n)$, если она равна несократимой дроби со знаменателем 24?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27817	1,5
2	27741	45
3	27058	12
4	639941	0,17
5	320206	0,392
6	315119	7
7	77410	42
8	27505	-2
9	28004	15
10	99569	11
11	509167	-0,2
12	77495	18

№ 13.

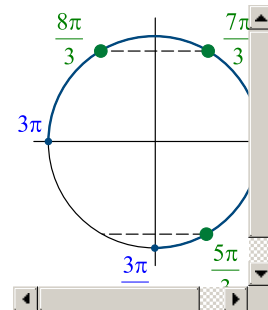
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Применим формулу косинуса двойного угла:

$$\cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0,75 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ при $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. По-лучим числа $\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{\pm \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно по-лучен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за ариф-метической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утвержде-ния пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

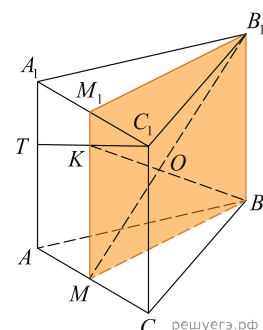
Решение. а) Пусть точка M_1 — середина A_1C_1 . Очевидно, $M_1 \in BB_1M$. Проведем MM_1 . Это прямая, содержащая среднюю линию треугольника TA_1C_1 , так как $MM_1 \parallel AA_1$ и проходит через середину A_1C_1 . Значит, она проходит и через середину TC_1 .

б) Обозначим середину TC_1 — K . Рассмотрим плоскость BB_1M_1M . Отрезок BK лежит в ней и в плоскости BTC_1 , поэтому надо узнать, как отрезок BK делит отрезок B_1M — диагональ прямо-угольника BB_1M_1M со сторонами $BB_1 = 9, BM = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. При этом $M_1K = \frac{A_1T}{2} = 2$.

Пусть O точка пересечения BK и B_1M . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{B_1O}{OM} &= \frac{S_{B_1BO}}{S_{BOM}} = \frac{B_1B \cdot BO \cdot \sin \angle B_1BO}{MB \cdot BO \cdot \sin \angle MBO} = \\ &= \frac{9 \cdot \cos \angle MBO}{2\sqrt{3} \cdot \sin \angle MBO} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \angle MBO = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{MB}{MK} = \frac{9}{7} \cdot \frac{B_1O}{OM} = \frac{S_{B_1BO}}{S_{BOM}} = \frac{B_1B \cdot BO \cdot \sin \angle B_1BO}{MB \cdot BO \cdot \sin \angle MBO} = \\ &= \frac{9 \cdot \cos \angle MBO}{2\sqrt{3} \cdot \sin \angle MBO} = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \operatorname{ctg} \angle MBO = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{MB}{MK} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

Поэтому $OM = \frac{7}{16} B_1M = \frac{7}{16} \sqrt{93}$.



Ответ: б) $\frac{7}{16} \sqrt{93}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначим $2^x = t$, получим:

$$\frac{2t-7}{t^2-2t-3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-(t-2)^2}{(t+1)(t-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2, \\ t < -1, \\ t > 3. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной, получим: $x=1$, $x > \log_2 3$.

Ответ: $\{1\} \cup (\log_2 3; \infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. В соответствии с условием задачи заполним таблицу.

Год	Долг в январе после начисления процен- тов, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг в июле до начисления процен- тов, млн руб.
2026			S
2027	$1,2S$	$0,5S$	$0,7S$
2028	$0,84S$	$0,44S$	$0,4S$
2029	$0,48S$	$0,28S$	$0,2S$
2030	$0,24S$	$0,24S$	0

Общая сумма выплат составит

$$0,5S + 0,44S + 0,28S + 0,24S = 1,46S \text{ млн рублей.}$$

Общая сумма выплат будет больше 10 млн руб., если

$$1,46S > 10 \Leftrightarrow S > \frac{1000}{146} \Leftrightarrow S > 6\frac{124}{146}.$$

Наименьшее целое S , удовлетворяющее неравенству, равно 7.

Ответ: 7.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть диагонали квадрата пересекаются в точке E . Тогда $KE = \frac{R}{2}$, где R — радиус окружности. Значит, $\operatorname{tg} \angle KBE = \frac{KE}{EB} = \frac{1}{3}$, откуда

$$\cos \angle KBE = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Заметим, что

$$AB = BD \cdot \cos \angle KBE = \frac{6R}{\sqrt{10}},$$

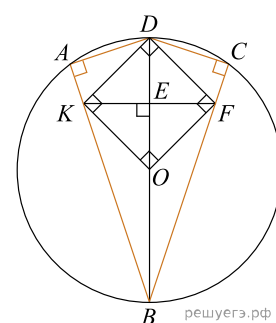
$$KB = \frac{BE}{\cos \angle KBE} = \frac{3R}{2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{\sqrt{10}R}{2}.$$

Таким образом, находим:

$$AK : KB = (AB - KB) : KB = \frac{R \left(\frac{6}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{10}}{2} \right)}{\frac{\sqrt{10}R}{2}} = \frac{R \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{\sqrt{10}R}{2}} = \frac{1}{5}.$$

б) Найдем площадь четырехугольника $ABCD$:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= 2S_{ABED} = AB \cdot BD \cdot \sin \angle KBE = \frac{6R}{\sqrt{10}} \cdot 2R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^2} = \frac{12R^2}{10} = \frac{6}{5} \cdot 25 = 30. \\ S_{ABCD} &= 2S_{ABED} = AB \cdot BD \cdot \sin \angle KBE = \\ &= \frac{6R}{\sqrt{10}} \cdot 2R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}} \right)^2} = \frac{12R^2}{10} = \frac{6}{5} \cdot 25 = 30. \end{aligned}$$



решуегз.рф

$$= \frac{6R}{\sqrt{10}} \cdot 2R \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2} =$$

$$= \frac{12R^2}{10} = \frac{6}{5} \cdot 25 = 30.$$

Ответ: 30.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено все значения a , но ответ содержит лишнее значение.	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения.	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a , при каждом из которых неравенство

$$21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$$

выполнено при любом $b > a$. Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b) = 21b - 6|a+b| + 3|b-2| + |a-b| + 9|a^2 - b + 2| - 16 \geq 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b > a$ тогда и только тогда, когда $F(a) \geq 0$, то есть

$$9a^2 + 12a - 12|a| + 3|a-2| + 2 \geq 0.$$

Отметим, что при $a \geq 0$ полученное неравенство верно. Если $a < 0$, то неравенство равносильно неравенству

$$9a^2 + 21a + 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-7 + \sqrt{17}}{6} \leq a < 0; \\ a \leq \frac{-7 - \sqrt{17}}{6}. \end{cases}$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a = -1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при значении $a = -1$ существует такое $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9|a^2 - b + 2| + 16$ не выполнено.

Ответ: -1.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2

Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Подходит, например, 238, поскольку $\frac{238}{2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{119}{24}$.

б) Поскольку при сокращении дроби и в числителе и в знаменателе остаются делители изначального числа и произведения его цифр, число должно было делиться на 125. Если при этом оно было четным, то заканчивалось на 0, поэтому его произведение цифр было нулем, что невозможно. Проверяя числа 125, 375, 625, 875, видим, что ни у одного из них произведение цифр не кратно 24.

в) Если дробь несократима, в числителе должно стоять число с произведением цифр 24, при этом не кратное 2 и 3. Девятки и семерки среди его цифр точно нет, если есть восьмерка, то остальные цифры — 3 и 1, что дает числитель, кратный 3. Если же максимальная из цифр шестерка, то остальные либо 2 и 2 (тогда число четно), либо 4 и 1. Таким образом, получаем $\frac{641}{24}$.

Если же дробь сократима, то ее числитель после сокращения не превосходит $999 : 2 < 641$, поэтому такие дроби точно не дадут максимальный результат.

Ответ: а) 238; б) нет; в) $\frac{641}{24}$.