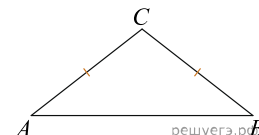


Вариант 134

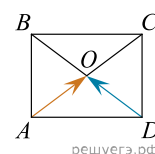
№ 1.

Один угол равнобедренного треугольника на 90° больше другого. Найдите меньший угол. Ответ дайте в градусах.



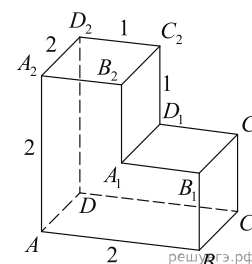
№ 2.

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 8. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину суммы векторов $\vec{AO}$ и $\vec{DO}$.



№ 3.

Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



№ 4.

Игральный кубик подбросили два раза. Известно, что три очка не выпало ни разу. Какова вероятность, что выпало два чётных числа?

№ 5.

В аэропорту два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна $0,3$. Такова же вероятность, что чай закончится во втором автомате. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна $0,13$. Найдите вероятность того, что к концу дня в одном из автоматов чай закончится, а в другом — нет.

№ 6.

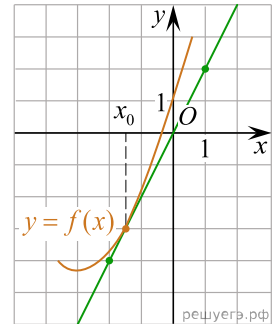
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-3x} = 32$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{g(x-9)}{g(x-11)}$, если $g(x) = 8^x$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

**№ 9.**

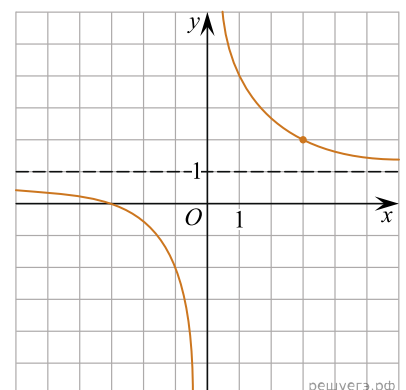
Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров?

№ 10.

В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоять на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.

**№ 12.**

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $2\cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.
-

№ 14.

Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB=9$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 8$. Точка K делит сторону SB так, что $SK:KB=7:3$. Ребро $SA = \sqrt{43}$. Точки M и K принадлежат плоскости α , которая перпендикулярна плоскости ABC .

- а) Докажите, что точка C принадлежит плоскости α .
- б) Найдите площадь сечения α .
-

№ 15.

Решите неравенство $32 \cdot 2^{x^2+3x} - \frac{2^{x^2}}{16} + 1 \geq 2^{3x+9}$.

№ 16.

Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 4 единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5000000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

№ 17.

На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB , H — точка пересечения прямых CM и DK .

- а) Докажите, что $CM \perp DK$.
- б) Найдите MH , если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

№ 19.

Натуральное число $n > 1$ будем называть хорошим, если его последняя цифра больше 1 и оно делится на свою последнюю цифру. Частное от деления хорошего числа n на последнюю цифру обозначим n^* .

а) Может ли быть $n^* = 18$?

б) Пусть m — натуральное число. При каких значениях последней цифры числа m существует такое хорошее число n , что $n^* = m$?

в) Натуральное число $n > 1$ будем называть отличным, если все его натуральные делители, кроме 1, хорошие числа. Найдите все отличные числа.

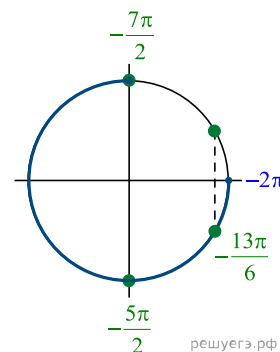
Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27754	30
2	27711	6
3	245371	5
4	676847	0,36
5	320452	0,34
6	510382	5
7	77401	64
8	27503	2
9	500252	2,4
10	99566	20
11	508961	-15
12	77423	0

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Заметим, что $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos^2 x$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$, откуда $2\cos x\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$. Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



б) Отберем с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$: $x = -\frac{7\pi}{2}, x = -\frac{5\pi}{2}, x = -\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{13\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть SO — высота пирамиды, а KH — перпендикуляр, проведенный из K к плоскости ABC . Очевидно, что основание перпендикуляра H — проекция точки K , лежит на BO — проекции BS . Докажем, что M, H и C лежат на одной прямой. Пусть MC пересекает BO в точке T , и пусть N — середина AB . Запишем теорему Менелая для треугольника BNO и прямой CM : $\frac{BM}{MN} \cdot \frac{NC}{CO} \cdot \frac{OT}{TB} = 1$, тогда $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{OT}{TB} = 1$. Из последнего соотношения получаем: $OT : TB = 7 : 3$. Но $OH : HB = SK : KB = 7 : 3$. Значит, точки H и T совпадают. Следовательно, CM пересекает BO в точке H . Плоскость KMC содержит KH , которая перпендикулярна ABC . Таким образом, плоскости KMC и ABC перпендикулярны. Поэтому плоскость α проходит через точку C .

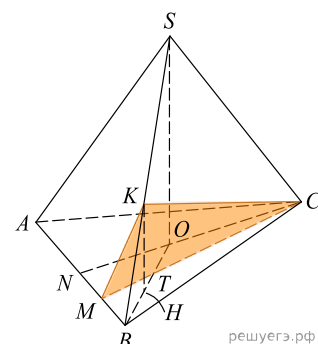
б) Заметим, что

$$KH = \frac{3}{10}SO = \frac{3}{10}\sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{6}{5}.$$

Вычислим CM при помощи теоремы косинусов:

$$CM^2 = 9^2 + 1^2 - 2 \cdot 9 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 73.$$

Поэтому площадь треугольника CKM равна



$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \sqrt{73} = \frac{6\sqrt{73}}{10} = \frac{3\sqrt{73}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{73}}{5}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство и воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{aligned}
 32 \cdot 2^{x^2+3x} - \frac{2^{x^2}}{16} + 1 &\geq 2^{3x+9} \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+3x+9} - 2^{x^2} + 16}{16} \geq 2^{3x+9} \Leftrightarrow 2^{x^2+3x+9} - 2^{x^2} + 16 \geq 16 \cdot 2^{3x+9} \Leftrightarrow \\
 32 \cdot 2^{x^2+3x} - \frac{2^{x^2}}{16} + 1 &\geq 2^{3x+9} \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+3x+9} - 2^{x^2} + 16}{16} \geq 2^{3x+9} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x+9} - 2^{x^2} + 16 &\geq 16 \cdot 2^{3x+9} \Leftrightarrow 32 \cdot 2^{x^2+3x} - \frac{2^{x^2}}{16} + 1 \geq 2^{3x+9} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{2^{x^2+3x+9} - 2^{x^2} + 16}{16} &\geq 2^{3x+9} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x+9} - 2^{x^2} + 16 &\geq 16 \cdot 2^{3x+9} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x+9} - 2^{x^2} + 16 - 16 \cdot 2^{3x+9} &\geq 0 \Leftrightarrow 2^{3x+9} (2^{x^2} - 16) - (2^{x^2} - 16) \geq 0 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x+9} - 2^{x^2} + 16 - 16 \cdot 2^{3x+9} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2^{3x+9} (2^{x^2} - 16) - (2^{x^2} - 16) &\geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (2^{x^2} - 16) (2^{3x+9} - 1) &\geq 0 \Leftrightarrow (2^{x^2} - 2^4) (2^{3x+9} - 2^0) \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(3x + 9 - 0) \geq 0 \Leftrightarrow (2^{x^2} - 16) (2^{3x+9} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (2^{x^2} - 2^4) (2^{3x+9} - 2^0) &\geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(3x + 9 - 0) \geq 0 \Leftrightarrow (2^{x^2} - 16) (2^{3x+9} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (2^{x^2} - 2^4) (2^{3x+9} - 2^0) &\geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(3x + 9 - 0) &\geq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x + 3) &\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq -2, \\ x \geq 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $[-3; -2] \cup [2; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть на первом заводе работают суммарно x^2 , а на втором — y^2 часов в неделю. Требуется найти максимум суммы $s = 3x + 4y$ при условии

$$500(x^2 + y^2) = 5000000 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10000. \quad (*)$$

Выразим y из первого соотношения: $y = \frac{1}{4}(s - 3x)$, подставим в $(*)$, получим уравнение:

$$x^2 + \left(\frac{1}{4}(s - 3x)\right)^2 = 10000 \Leftrightarrow 25x^2 - (6s)x + (s^2 - 160000) = 0. \quad (**)$$

$$x^2 + \left(\frac{1}{4}(s - 3x)\right)^2 = 10000 \Leftrightarrow 25x^2 - (6s)x + (s^2 - 160000) = 0. \quad (**)$$

Полученное уравнение имеет решения, если неотрицателен его дискриминант, а значит, и четверть дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = 9s^2 - 25(s^2 - 160000) \geq 0 \Leftrightarrow -500 \leq s \leq 500.$$

Таким образом, наибольшее возможное значение $s = 3x + 4y$ равно 500. Покажем, что оно достигается при натуральных значениях переменных: действительно, из $(**)$ находим, что значению $s = 500$ соответствует $x = 60$, а тогда $y = 80$.

Ответ: 500 единиц товара.

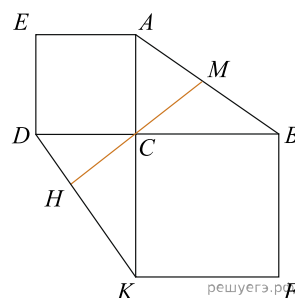
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Треугольник ABC прямоугольный, поэтому $AK \perp DB$. M — середина AB , поэтому CM — медиана прямоугольного треугольника, откуда $CM = MB = AM$. Тогда $\angle MBC = \angle MCB = \angle DCH$ (поскольку $\angle DCH$ и $\angle MCB$ вертикальные).

$AK \perp DB$, $DC = AC$ и $KC = CB$, поэтому треугольники DCK и ACB равны. Значит, $\angle CDK = \angle CAB$. $\angle CDK = \angle CAB$ и $\angle DCH = \angle CBA$, поэтому треугольники DCH и ABC подобны по двум углам. Значит, DCH прямоугольный и $CH \perp DK$.

б) По теореме Пифагора $AB = 338$. Тогда $MC = 169$. Имеем $DC^2 = DK \cdot DH$, то есть $DH = 50$, тогда $HK = 288$. Значит, $CH = \sqrt{50 \cdot 288} = 120$. Тогда $MH = 120 + 169 = 289$.



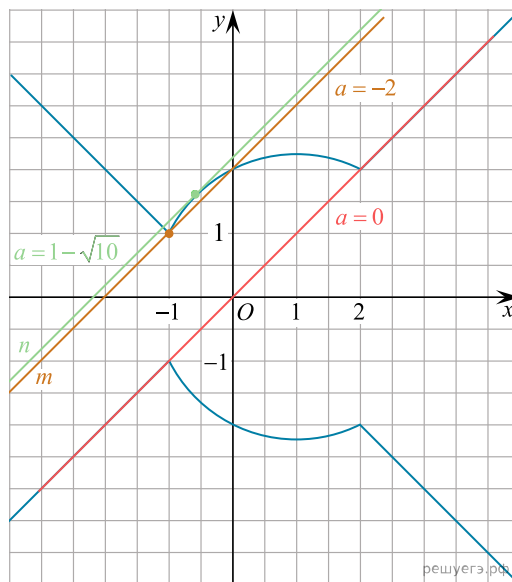
Ответ: 289.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Раскроем модуль: при $x > 2$ или $x < -1$, уравнение $y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2|$ принимает вид $y^2 = x^2$ (*), при $-1 \leq x \leq 2$, его можно записать в виде $(x-1)^2 + y^2 = 5$ (**).

На координатной плоскости уравнение (*) задает прямые $y = x$ или $y = -x$. Уравнение (**) задает окружность с центром в точке $(1; 0)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Таким образом, график первого уравнения исходной системы имеет вид, приведенный на рисунке синим цветом.

Графиком второго уравнения является семейство прямых $y = x - a$, получаемых сдвигом прямой $y = x$ на a единиц вдоль оси ординат. Система имеет более двух решений тогда и только тогда, когда графики построенных уравнений имеют более двух общих точек. Возможны два случая: графики уравнений имеют бесконечно много общих точек, что возможно при $a = 0$ (выделено на рисунке красным) или прямые $y = x - a$ лежат между прямыми m и n (см.рис.). Здесь прямая m проходит через точку $(-1; 1)$, а прямая n является касательной к окружности.



Определим уравнение касательной, подставив $y = x - a$ в (**).

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 - 2xa + a^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 2(1+a)x + a^2 - 4 = 0.$$

Очевидно, что дискриминант этого уравнения должен равняться 0:

$$\frac{D}{4} = 1 + 2a + a^2 - 2a^2 + 8 = -a^2 + 2a + 9,$$

$$-a^2 + 2a + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - \sqrt{10}, \\ a = 1 + \sqrt{10}. \end{cases}$$

Нам подходит меньший корень, так как больший корень сдвинет нашу прямую вниз. Это происходит потому, что знак перед a отрицательный. Подставив координаты точки $(-1; 1)$ в уравнение прямой из второй строчки системы, получим, что $a = -2$.

Таким образом, получаем окончательный ответ $1 - \sqrt{10} < a < -2; a = 0$.

Ответ: $(1 - \sqrt{10}; -2) \cup \{0\}$.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) По условию $10k + a = 18a$, $10k = 17a$, значит, a кратно 10. Такая цифра только 0, но делить на 0 нельзя.

б) По условию $10k + a = n^* \cdot a$, то есть $10k = (n^* - 1)a$. Если $n^* - 1$ заканчивается на 1, 3, 7 или 9, то из этого равенства следует, что a кратно 10, что невозможно. Следовательно, если n^* заканчивается на 2, 4, 8 или 0, то описанная ситуация невозможна. Для других последних цифр ситуация возможна. Если $m = n^*$ заканчивается на 6, то можно положить $a = 2$ и $k = \frac{m-1}{5}$. Если же m нечетно, то можно положить $a = 5$ и $k = \frac{m-1}{2}$.

в) Выясним, как устроены хорошие числа с разной последней цифрой.

При $a = 0$ или $a = 1$ хороших чисел нет.

При $a = 2$ или $a = 5$ любое число хорошее.

При $a = 3$ или $a = 6$ получаем, что $10k$ кратно 3 или 6, то есть k кратно 3.

При $a = 4$ получаем, что $10k$ кратно 4, то есть k кратно 2.

При $a = 7$ получаем, что $10k$ кратно 7, то есть k кратно 7.

При $a = 8$ получаем, что $10k$ кратно 8, то есть k кратно 4.

При $a = 9$ получаем, что $10k$ кратно 9, то есть k кратно 9.

Рассмотрим теперь только простые делители p . Ясно, что они не могут делиться на свою последнюю цифру, если они не однозначны или не кончаются на 1. Однако такие делители по условию не считаются хорошими. Значит, разложение на множители нашего числа имеет вид $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^t$, причем взять одновременно 2 и 5 или 3 и 7 нельзя, поскольку тогда у числа будут делители 10 или 21, а они не являются хорошими. Аналогично нельзя взять 2 и 7, число 14 не будет хорошим.

Разберем теперь оставшиеся варианты.

1. Число вида $2^x \cdot 3^t$. Очевидно, $t \leq 2$, поскольку 27 не будет хорошим делителем и $x \leq 4$, поскольку 16 не будет хорошим делителем. Перебирая числа 2, 4, 8, 6, 12, 24, 18, 36, 72, обнаруживаем, что подходят первые 6, а остальные кратны 18 — они не подойдут.

2. Число вида $3^x \cdot 5^y$. Очевидно, $x \leq 2$, как и в предыдущем случае, и все такие числа подходят — их делителями будут 3, 9 и числа с последней цифрой 5.

3. Число вида $7^x \cdot 5^y$. Аналогично, $x \leq 1$ и все такие числа подходят.

Ответ: а) нет; б) 1, 3, 5, 6, 7, 9; в) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, $24 \cdot 5^x$, $5^x \cdot 3$, $5^x \cdot 7$, $5^x \cdot 9$ при натуральных x .