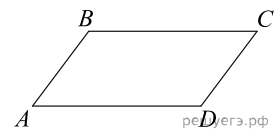


Вариант 138

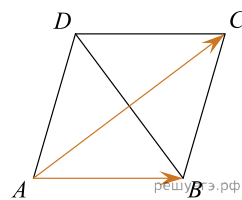
№ 1.

Площадь параллелограмма равна 40, две его стороны равны 5 и 10. Найдите большую высоту этого параллелограмма.



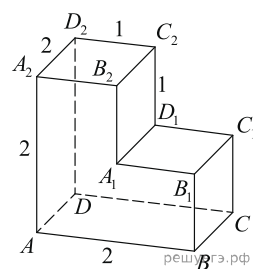
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.



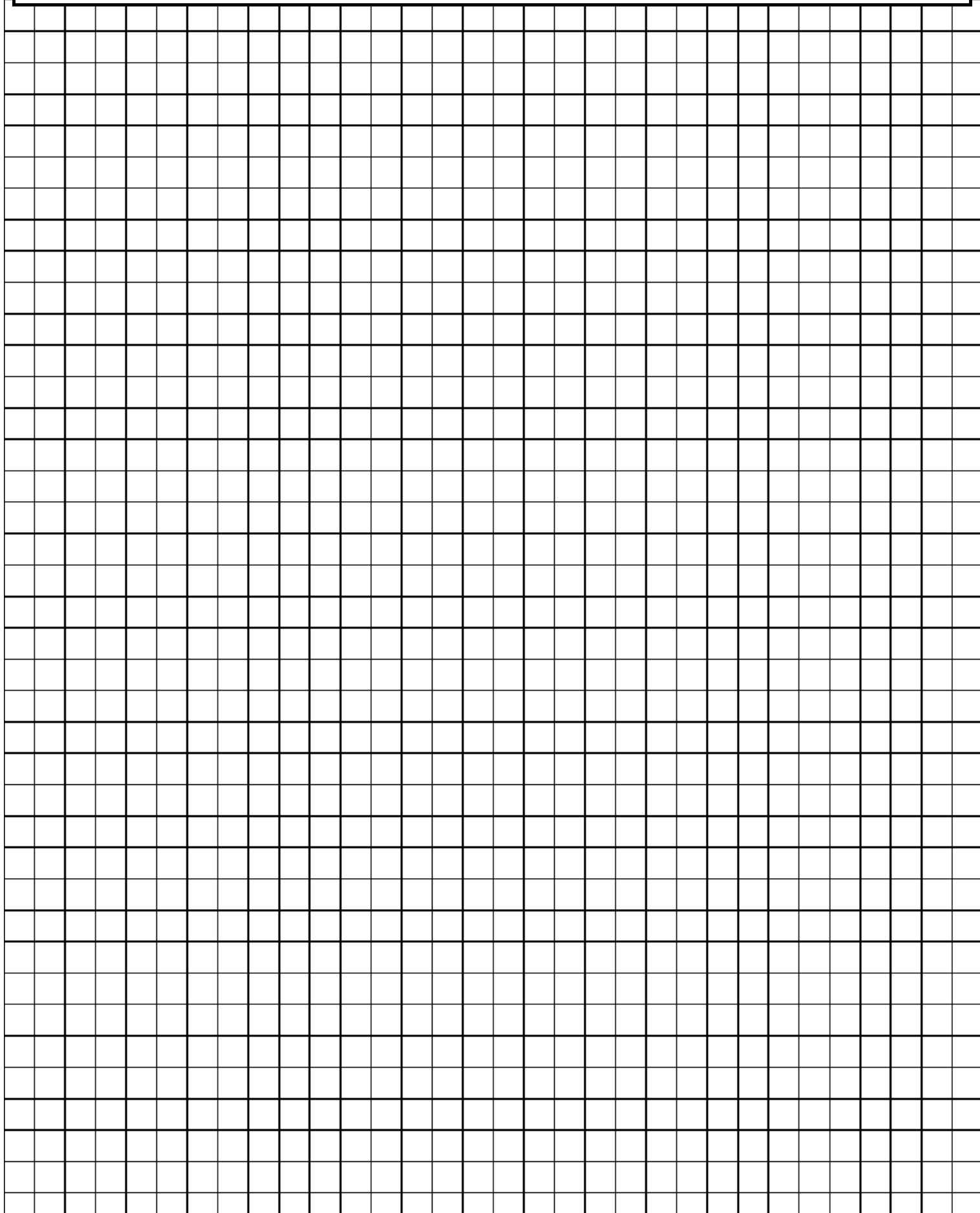
№ 3.

Найдите квадрат расстояния между вершинами D и C_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



№ 4.

В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.



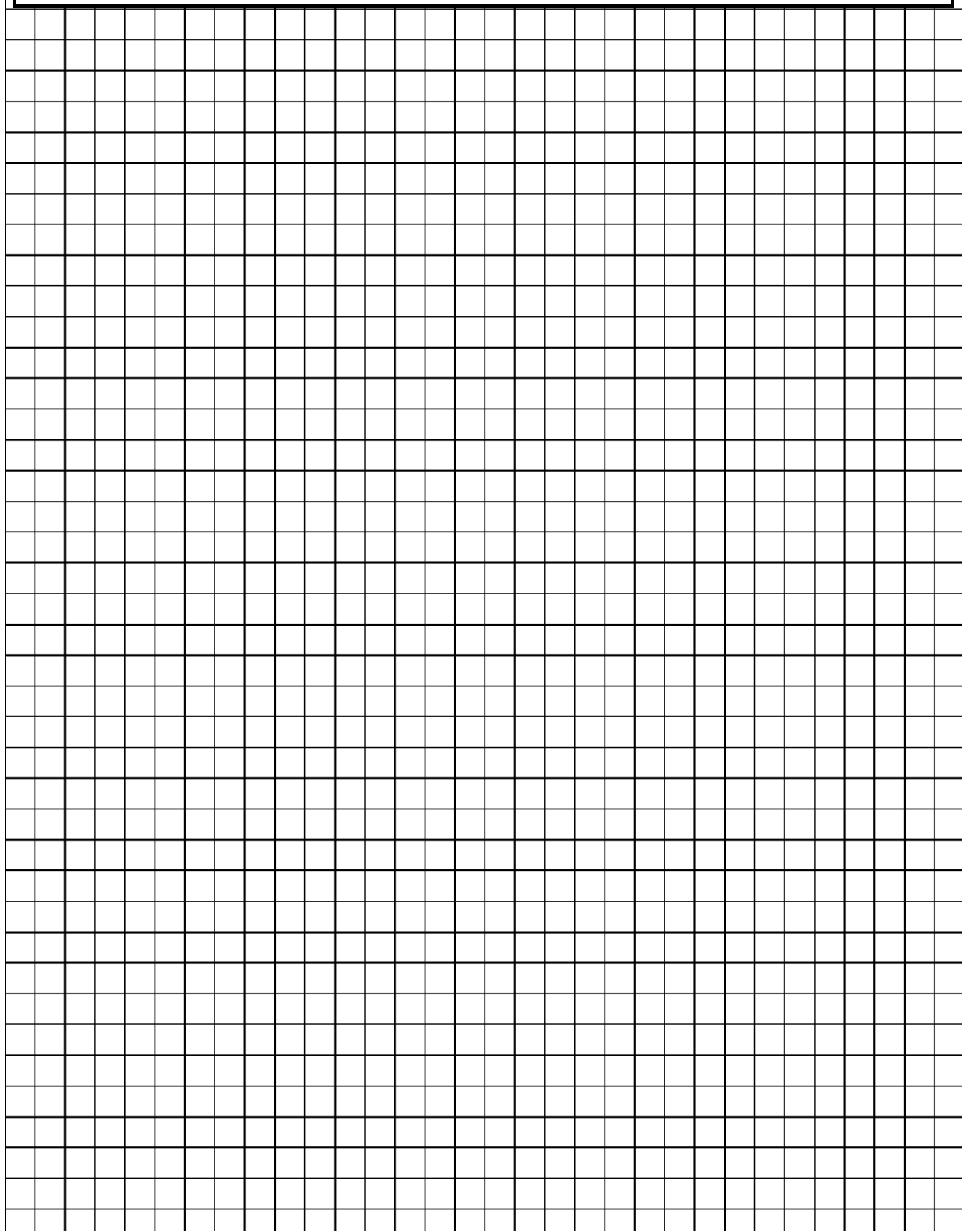
№ 5.

В одном ресторане в г.Тамбове администратор предлагает гостям сыграть в «Шеш-беш»: гость бросает одновременно две игральные кости. Если он выбросит комбинацию 5 и 6 очков хотя бы один раз из двух попыток, то получит комплемент от ресторана: чашку кофе или десерт бесплатно. Какова вероятность получить комплемент? Результат округлите до сотых.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin black lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

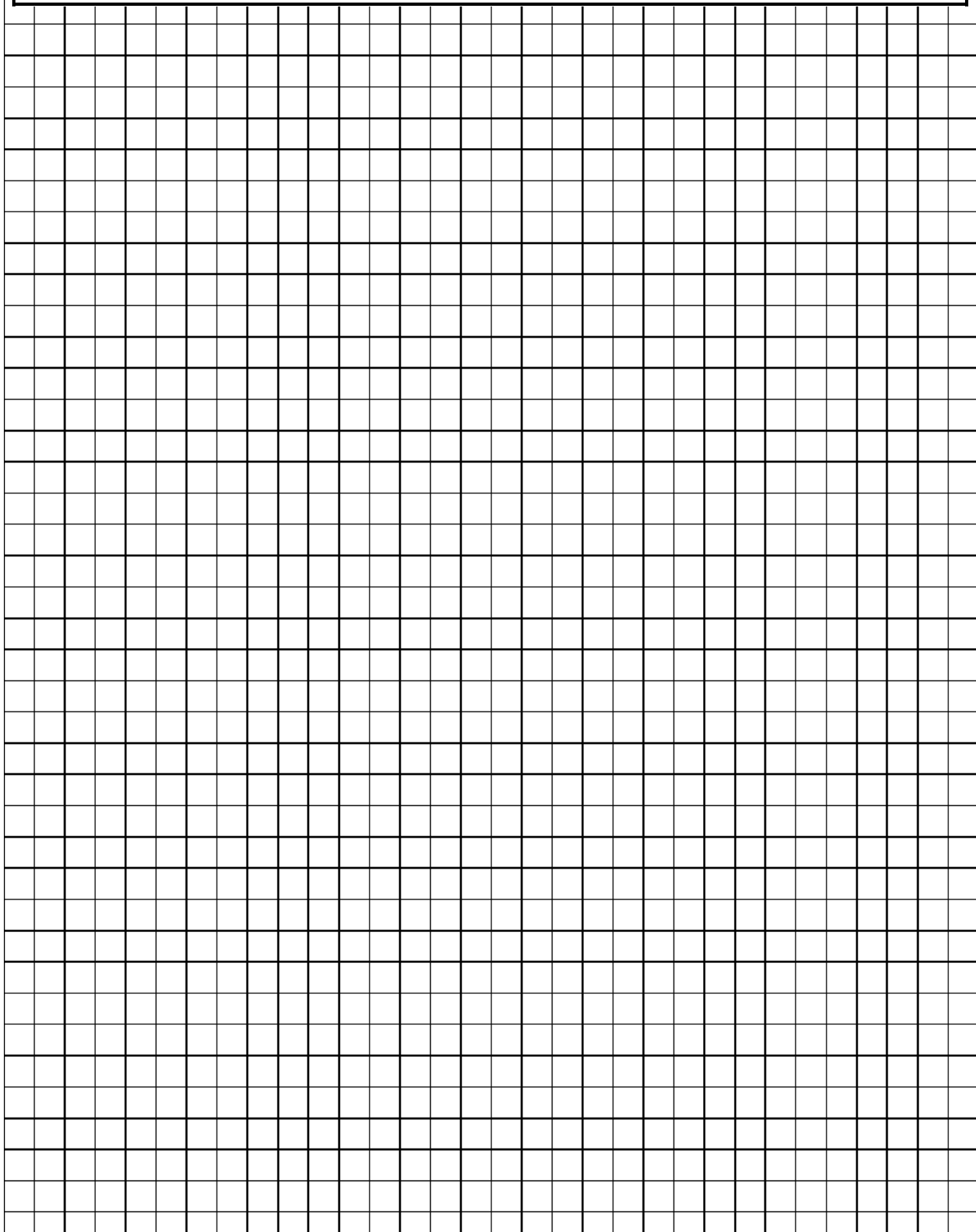
№ 6.

Решите уравнение $\sqrt{x-2} = 6$.



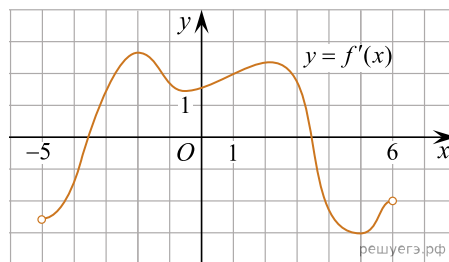
№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{a^{3,21} \cdot a^{7,36}}{a^{8,57}}$ при $a = 12$.



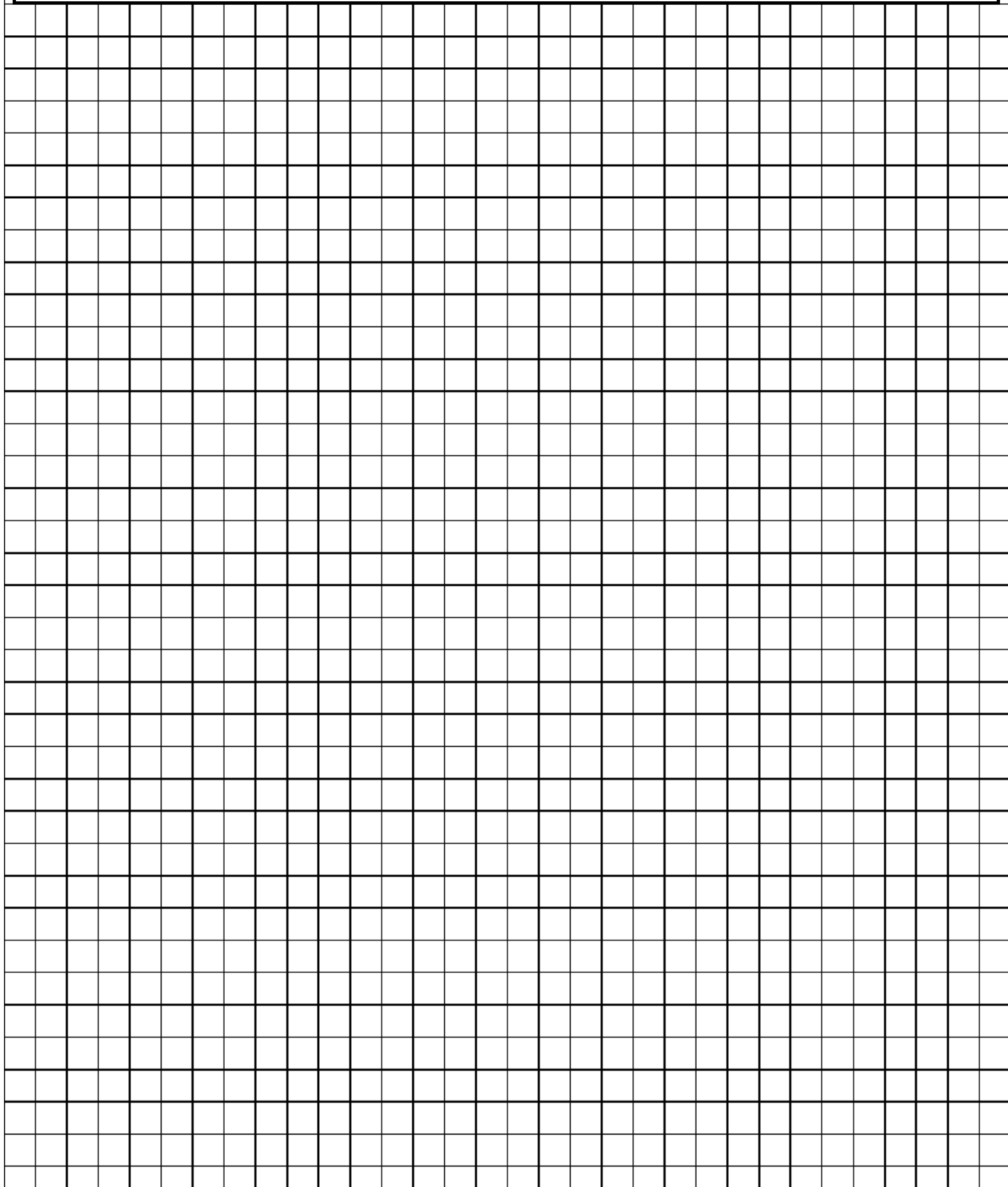
№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-5; 6]$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



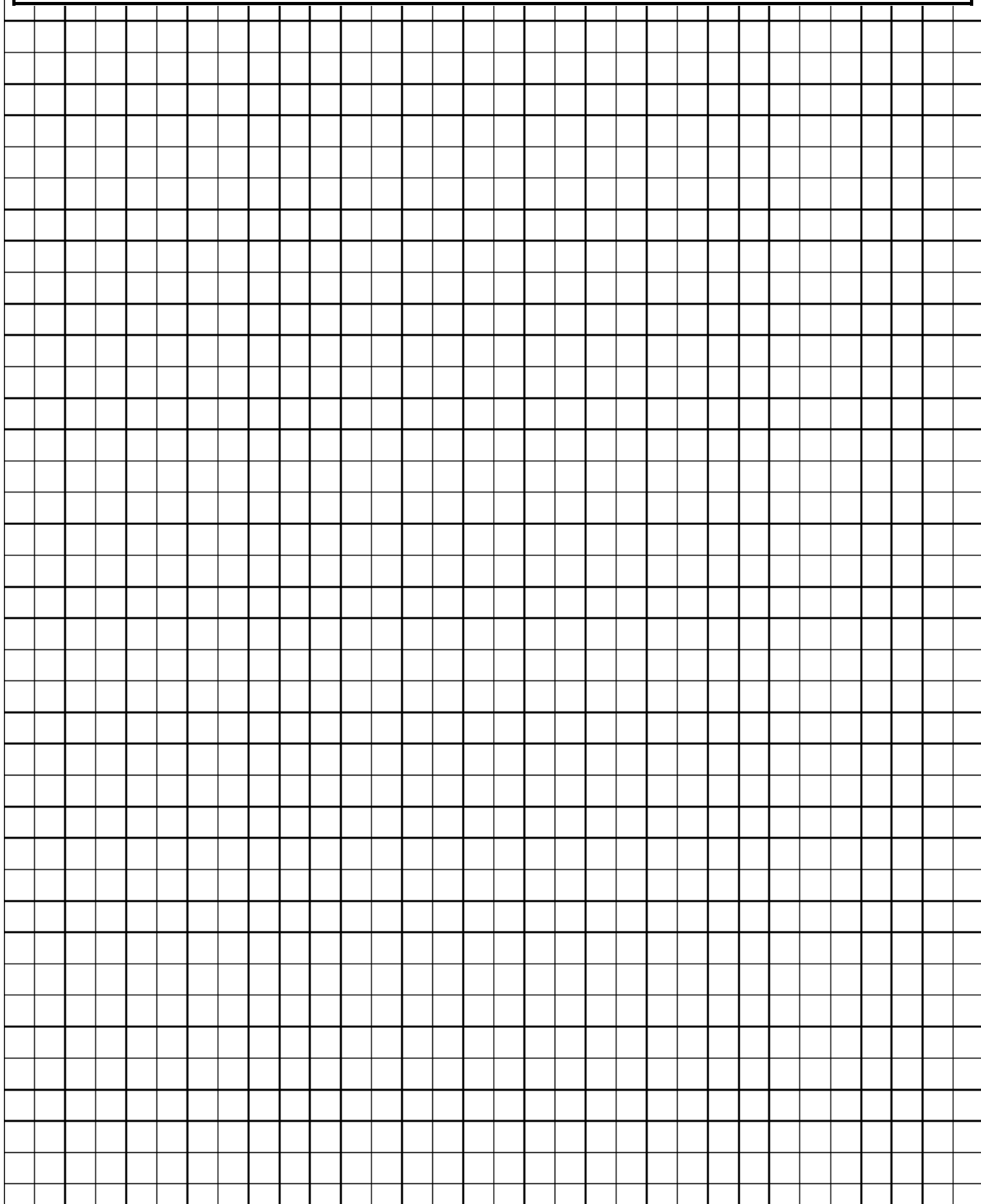
№ 9.

Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 1260$ тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 18$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m — масса экскаватора (в тоннах), l — длина балок в метрах, s — ширина балок в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10 \text{ м/с}^2$). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 140 кПа . Ответ выразите в метрах.



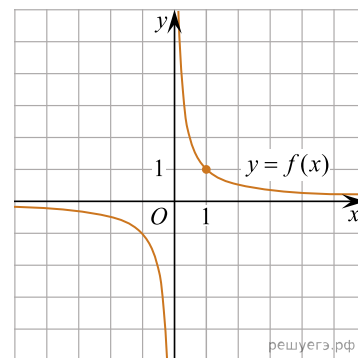
№ 10.

Расстояние между городами A и B равно 150 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A , автомобиль прибыл в B . Найдите расстояние от A до C . Ответ дайте в километрах.



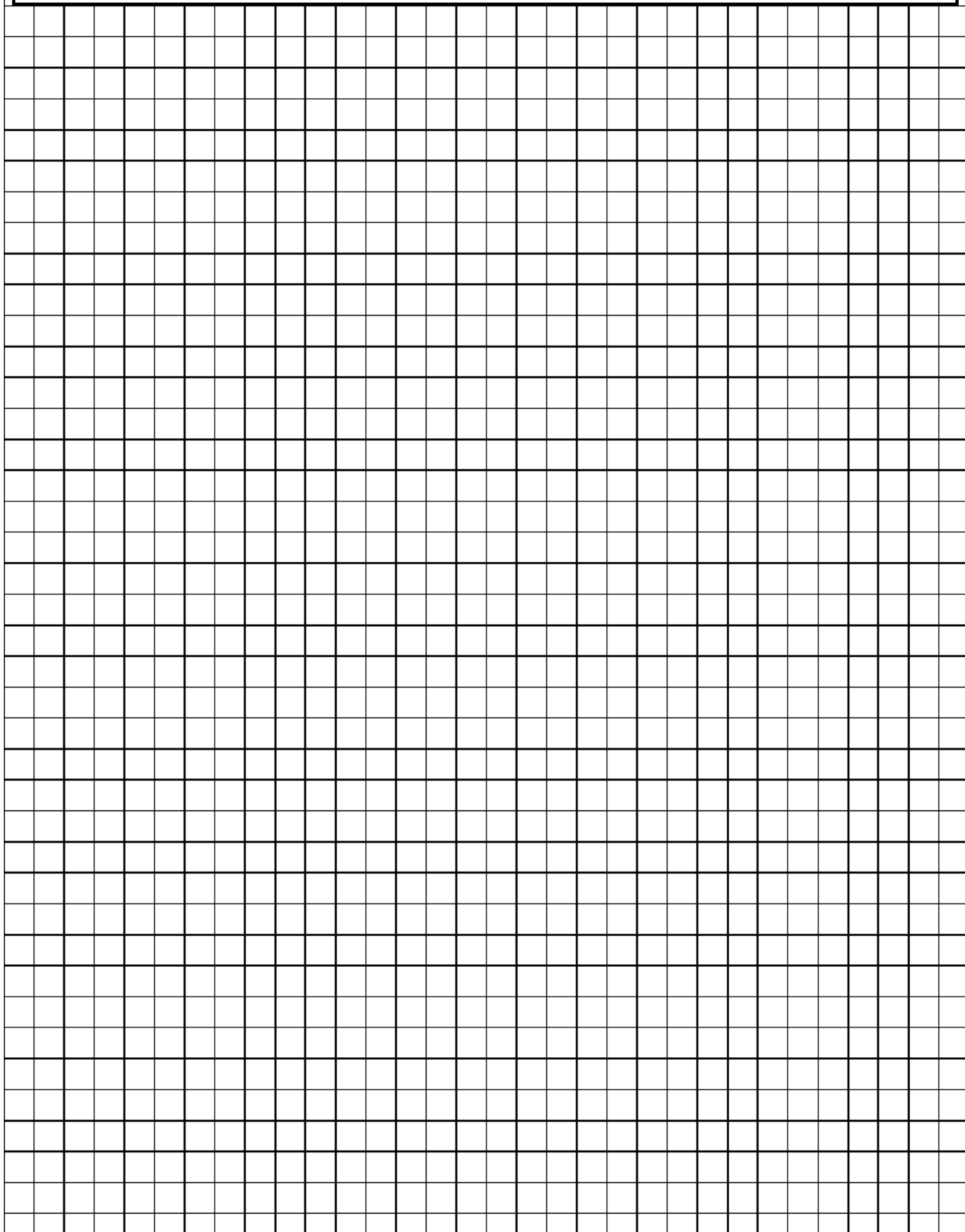
№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите $f(10)$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2(x+5) - 1$ на отрезке $[-4; -1]$.



№ 13.

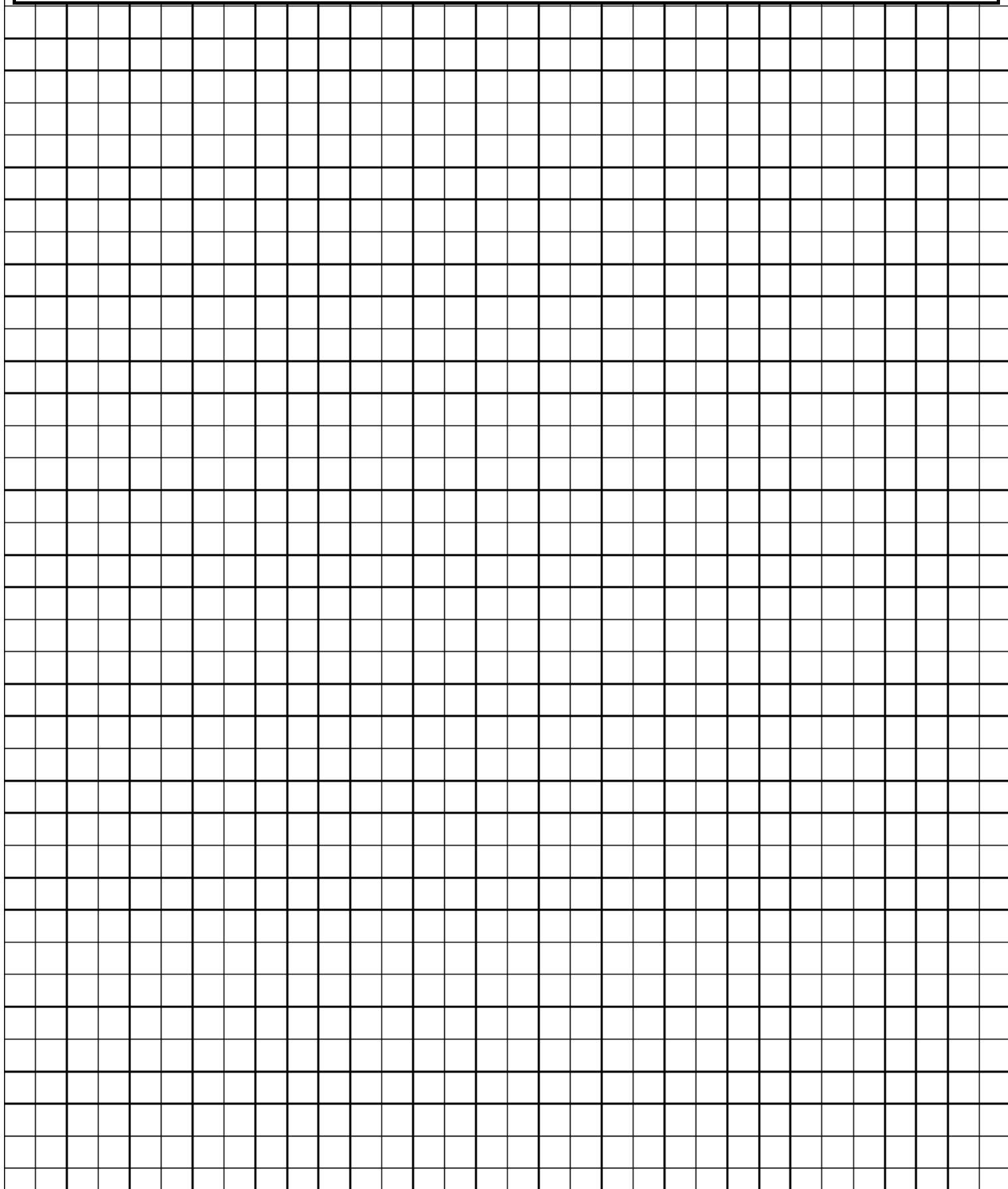
а) Решите уравнение $2 \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{1 + 8 \sin 2x \cos^2 2x}$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

№ 14.

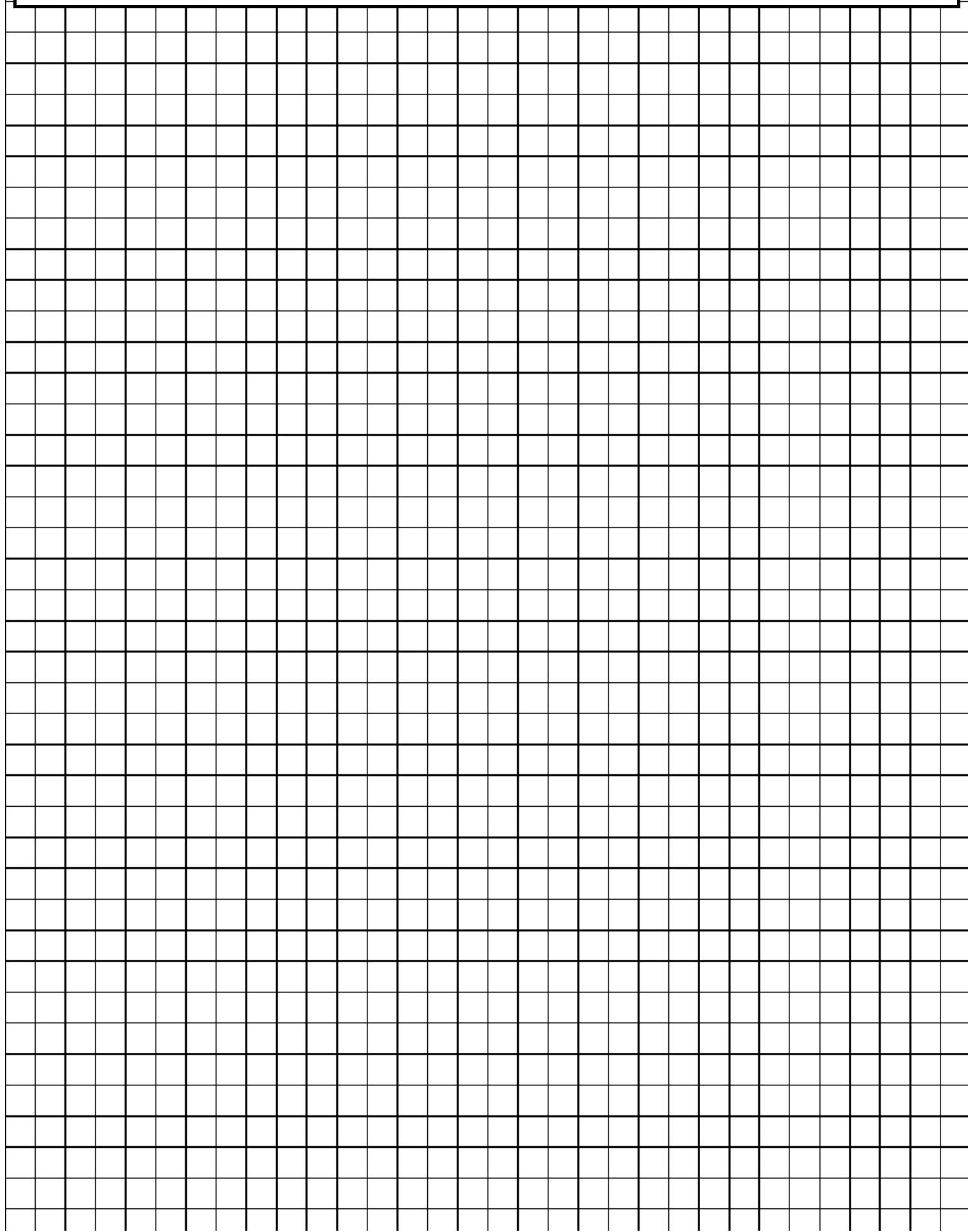
В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M, N, K делят ребра AA_1, BB_1, DD_1 в отношении $1:4, 1:5, 1:3$, считая от нижнего основания $ABCD$.

- а) Докажите, что плоскость MNK делит ребро CC_1 в отношении $13:47$, считая от нижнего основания.
б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы, если сторона основания равна $\sqrt{13}$, а высота равна 60.



№ 15.

Решите неравенство $\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10)$.



№ 16.

Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей.

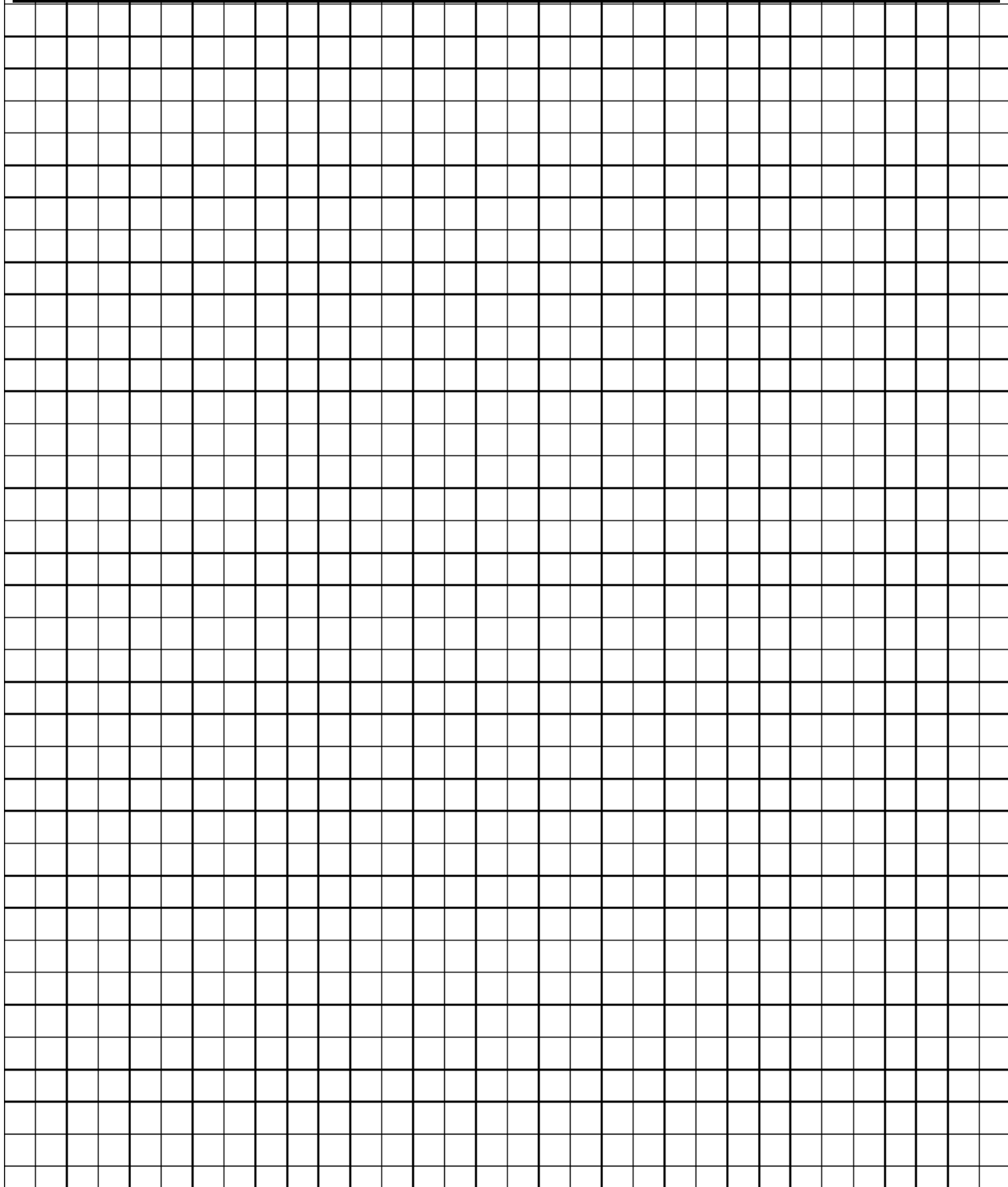
Антон готов выделять 900000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

№ 17.

В равнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CT к боковым сторонам BC и AB . Из точки H проведены перпендикуляры HK и HM на стороны AC и AB соответственно. Прямая MK пересекает прямую CT в точке E .

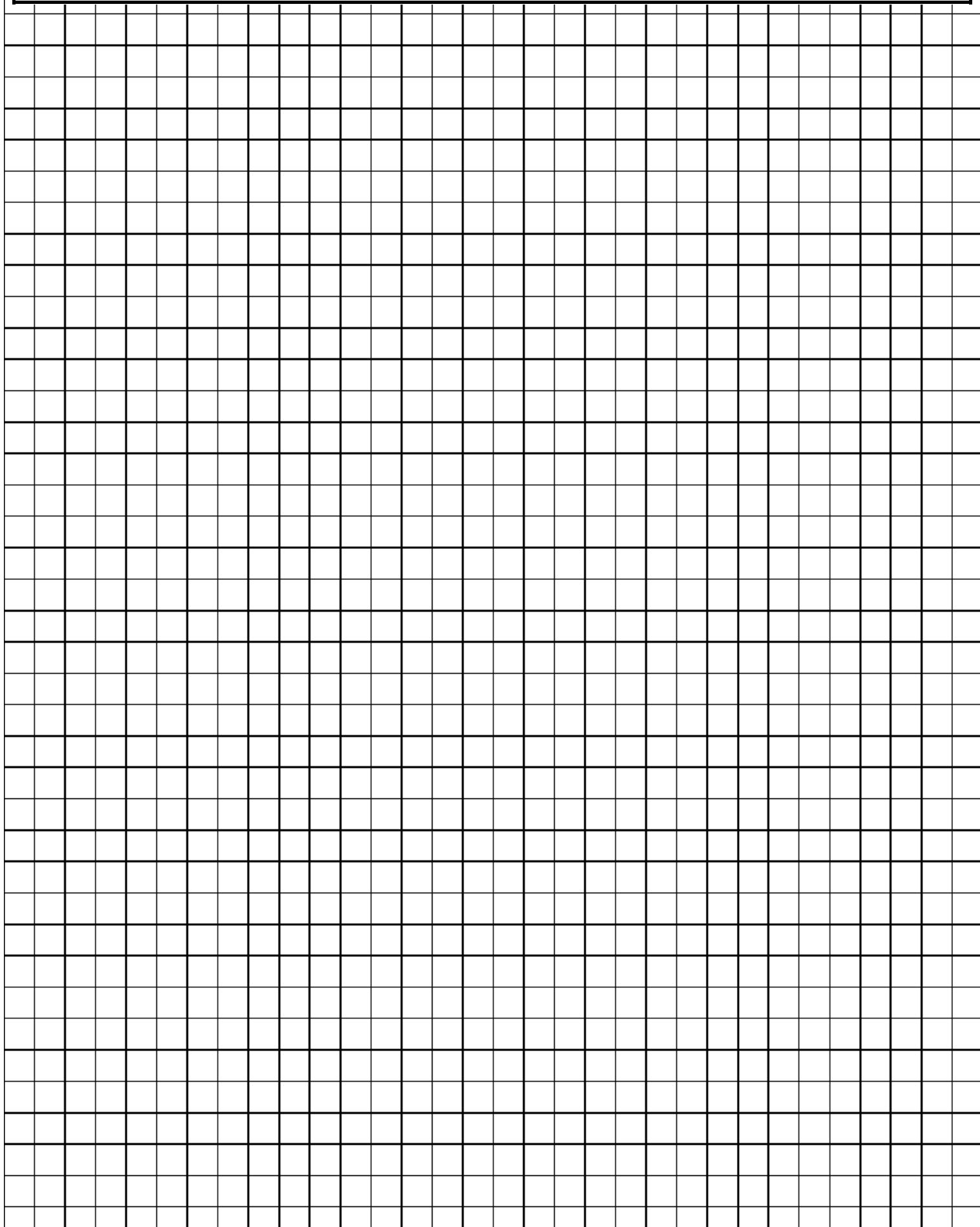
а) Докажите, что прямые EH и AB параллельны.

б) Найдите ME , если известно, что $AB = 17$ и $AC = 16$.



№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $16x^2(x-1) = (2x^2 - a)(a + 2x^2)$ имеет ровно два корня.



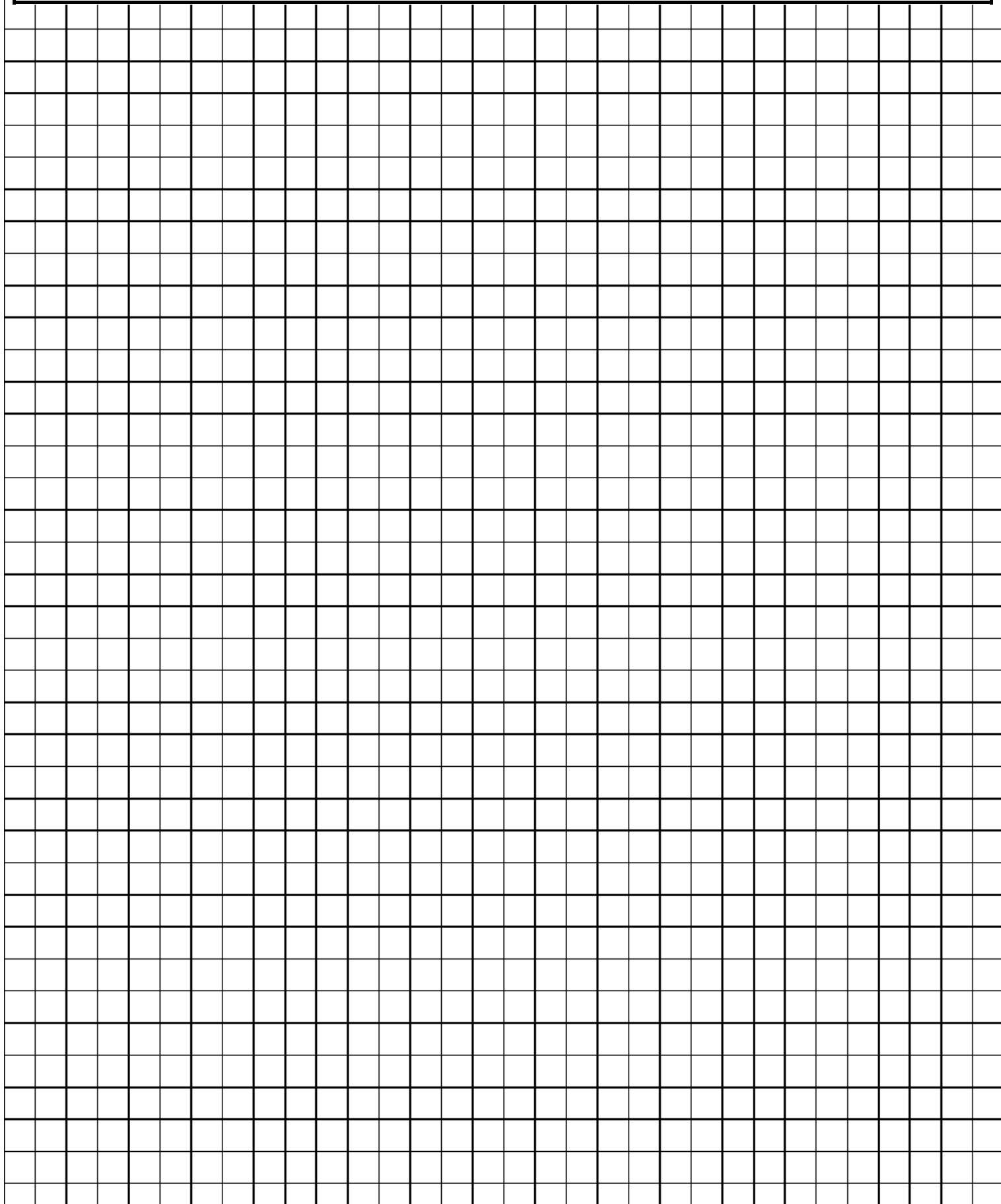
№ 19.

Натуральное числа n имеет ровно 21 делитель, включая 1 и само число.

а) Может ли число n делиться на 21?

б) Может ли число $14n$ иметь ровно 14 делителей?

в) Какое наименьшее число делителей может иметь число $14n$?



Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27612	8
2	27716	10
3	245371	5
4	1011	0,4
5	508791	0,11
6	500032	38
7	510957	144
8	551781	6
9	27978	2,5
10	99594	90
11	660801	0,1
12	282861	-1

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Преобразуем уравнение, учитывая, что $-1 \leq \sin 3x \leq 1$:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9 \sin^2 3x - 24 \sin 3x + 16} = -4 \Leftrightarrow \sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{(3 \sin 3x - 4)^2} = -4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow |\sin 3x - 2| - |3 \sin 3x - 4| = -4 \Leftrightarrow 2 - \sin 3x + 3 \sin 3x - 4 = -4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sin 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}. \sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9 \sin^2 3x - 24 \sin 3x + 16} = -4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{(3 \sin 3x - 4)^2} = -4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow |\sin 3x - 2| - |3 \sin 3x - 4| = -4 \Leftrightarrow 2 - \sin 3x + 3 \sin 3x - 4 = -4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sin 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}. \sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{9 \sin^2 3x - 24 \sin 3x + 16} = -4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{(\sin 3x - 2)^2} - \sqrt{(3 \sin 3x - 4)^2} = -4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow |\sin 3x - 2| - |3 \sin 3x - 4| = -4 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 2 - \sin 3x + 3 \sin 3x - 4 = -4 \Leftrightarrow \sin 3x = -1 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

б) Отберем корни при помощи двойного неравенства:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \pi & \Leftrightarrow -3 \leq -1 + 4k \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0, \\ k=1. \end{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \leq \pi \Leftrightarrow -3 \leq -1 + 4k \leq 6 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0, \\ k=1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Найденным значениям k соответствуют корни $-\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть плоскость MNK пересекает ребро CC_1 в точке L , O — точка пересечения LM и NK (середина диагоналей LM и NK параллелограмма $KLNM$), и пусть высота пирамиды равна h . Построим отрезок NR параллельно BD , где точка R лежит на ребре DD_1 и отрезок MS параллельно отрезку AC , где точка S лежит на ребре CC_1 . Пусть точки O_1 и O_2 — середины NR и MS , соответственно. Заметим, что OO_1 и OO_2 — средние линии треугольников NRK и MSL , соответственно. Тогда:

$$DR = BN = \frac{h}{6},$$

$$CS = AM = \frac{h}{5},$$

$$DK = \frac{h}{4},$$

$$KR = DK - DR = \frac{h}{12},$$

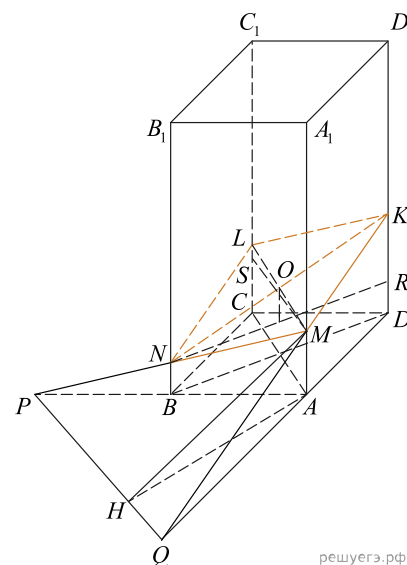
$$OO_1 = \frac{1}{2}KR = \frac{h}{24},$$

$$O_2O_1 = AM - BN = \frac{h}{30},$$

$$OO_2 = OO_1 - O_2O_1 = \frac{h}{120},$$

$$SL = 2OO_2 = \frac{h}{60},$$

$$CL = CS + SL = \frac{13h}{60},$$



решуегэ.рф

$$LC_1 = CC_1 - CL = \frac{47h}{60},$$

$$\text{откуда } \frac{CL}{LC_1} = \frac{13}{47}.$$

б) Пусть P — точка пересечения прямых AB и MN , а точка Q — AD и KM . Тогда прямая PQ — общая прямая плоскостей ABC и MNK . Из точки M опустим перпендикуляр MH на прямую PQ . По теореме о трех перпендикулярах его проекция AH также перпендикулярна PQ , следовательно, угол MHA — линейный угол искомого угла.

Из пункта а) следует: $BN = 10$, $AM = 12$, $DK = 15$. Треугольники QAM и QDK — подобны, следовательно,

$$\frac{QA}{QD} = \frac{QA}{QA + AD} = \frac{AM}{DK} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow QA = 4\sqrt{13}.$$

Аналогично, треугольники PBN и PAM подобны, следовательно,

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PB}{PB + AB} = \frac{BN}{AM} = \frac{5}{6},$$

$$\text{откуда } PB = 5\sqrt{13},$$

$$PA = 6\sqrt{13},$$

$$PQ = \sqrt{PA^2 + QA^2} = 26,$$

$$AH = \frac{AP \cdot AQ}{PQ} = 12.$$

$$\text{Находим: } \operatorname{tg} \angle MHA = \frac{AM}{AH} = 1, \text{ откуда } \angle MHA = 45^\circ.$$

Ответ: б) 45° .

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $\log_5(x^2 - 2x + 2) = t$, тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{1-t} < 1+t &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-t < (1+t)^2, \\ 1+t \geq 0, \\ 1-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 3t > 0, \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3, \\ t > 0, \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \leq 1. \\ \sqrt{1-t} < 1+t &\Leftrightarrow \begin{cases} 1-t < (1+t)^2, \\ 1+t \geq 0, \\ 1-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3, \\ t > 0, \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \leq 1. \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{aligned} 0 < \log_5(x^2 - 2x + 2) \leq 1 &\Leftrightarrow 1 < x^2 - 2x + 2 \leq 5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ (x+1)(x-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1, \\ 1 < x \leq 3. \end{cases} \\ 0 < \log_5(x^2 - 2x + 2) \leq 1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 < x^2 - 2x + 2 \leq 5 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 > 0, \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 > 0, \\ (x+1)(x-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 1, \\ 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

Ответ: $[-1; 1) \cup (1; 3]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть на оплату труда рабочих первого завода выделено x руб., а второго — оставшиеся $(900\,000 - x)$ руб. Тогда на первом заводе можно оплатить $\frac{x}{250}$ часов работы, а на втором — $\frac{900\,000 - x}{200}$ часов работы. Количество произведённого за неделю товара равно квадратным корням из этих величин, поэтому для ответа на вопрос задачи требуется найти наибольшее целое значение функции

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{x}{250}} + \sqrt{\frac{900\,000 - x}{200}} = \frac{\sqrt{10x}}{50} + \frac{\sqrt{1\,800\,000 - 2x}}{20} = \frac{1}{100}(2\sqrt{10x} + 5\sqrt{1\,800\,000 - 2x}) \\ f(x) &= \sqrt{\frac{x}{250}} + \sqrt{\frac{900\,000 - x}{200}} = \\ &= \frac{\sqrt{10x}}{50} + \frac{\sqrt{1\,800\,000 - 2x}}{20} = \frac{1}{100}(2\sqrt{10x} + 5\sqrt{1\,800\,000 - 2x}) \\ &= \frac{\sqrt{10x}}{50} + \frac{\sqrt{1\,800\,000 - 2x}}{20} = \\ &= \frac{1}{100}(2\sqrt{10x} + 5\sqrt{1\,800\,000 - 2x}) \end{aligned}$$

на отрезке $0 \leq x \leq 900\,000$. Найдём ее производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{100} \left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{1\,800\,000 - 2x}} \right) = \frac{1}{100} \frac{\sqrt{10}\sqrt{1\,800\,000 - 2x} - 5\sqrt{x}}{\sqrt{1\,800\,000 - 2x}\sqrt{x}} \\ f'(x) &= \frac{1}{100} \left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}} - \frac{5}{\sqrt{1\,800\,000 - 2x}} \right) = \\ &= \frac{1}{100} \frac{\sqrt{10}\sqrt{1\,800\,000 - 2x} - 5\sqrt{x}}{\sqrt{1\,800\,000 - 2x}\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Решая уравнение $f'(x) = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{1\,800\,000 - 2x} - 5\sqrt{x} &= 0 \Leftrightarrow 1\,800\,000 - 20x = 25x \Leftrightarrow x = 400\,000. \\ \sqrt{1\,800\,000 - 2x} - 5\sqrt{x} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1\,800\,000 - 20x &= 25x \Leftrightarrow x = 400\,000. \end{aligned}$$

Поскольку производная непрерывной функции $f(x)$ положительна на интервале $(0; 400\,000)$, равна нулю в точке $400\,000$ и отрицательна на интервале $(400\,000; 900\,000)$, функция $f(x)$ достигает наибольшего на отрезке $[0; 900\,000]$ значения в точке $400\,000$. Найдём его:

$$\begin{aligned} f(400\,000) &= \sqrt{\frac{400\,000}{250}} + \sqrt{\frac{500\,000}{200}} = \sqrt{1600} + \sqrt{2500} = 40 + 50 = 90. \\ f(400\,000) &= \sqrt{\frac{400\,000}{250}} + \sqrt{\frac{500\,000}{200}} = \\ &= \sqrt{1600} + \sqrt{2500} = 40 + 50 = 90. \end{aligned}$$

Таким образом, наибольшее возможное количество товара, которое могут произвести рабочие за неделю при заданном размере оплаты труда, равно 90 единицам.

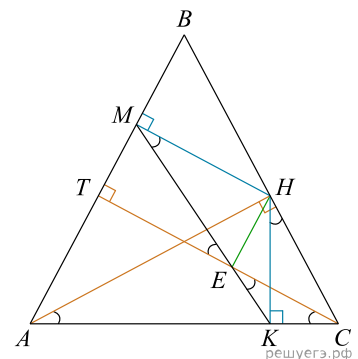
Ответ: 90.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
--	-------

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Сумма углов $\angle AMH$ и $\angle AKN$ равна 180° , поэтому четырехугольник $AMHK$ — вписанный. Вписанные углы $\angle HMK$ и $\angle KAH$ опираются на одну дугу, а потому равны. Прямые CT и HM перпендикулярны прямой AB , поэтому эти прямые параллельны. Тогда при пересечении их секущей MK образуются равные накрест лежащие углы $\angle HMK$ и $\angle MET$. Углы $\angle MET$ и $\angle KEC$ равны как вертикальные, а $\angle KHC = 90^\circ - \angle AHK = \angle KAH$. Отсюда следует, что $\angle KHC = \angle KEC$, а поскольку точки E и H лежат по одну сторону от прямой CK , то четырехугольник $EHCK$ — вписанный. Вписанные углы $\angle HKC$ и $\angle HEC$ опираются на одну дугу, а потому равны: $\angle HEC = \angle HKC = 90^\circ$. Таким образом, прямые HE и AB соответственно перпендикулярны прямой CT , то есть параллельны.



б) По теореме косинусов для треугольника ABC находим:

$$\cos \angle BAC = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{AC^2}{2AC \cdot AB} = \frac{AC}{2AB} = \frac{16}{2 \cdot 17} = \frac{8}{17}.$$

Пусть $\angle ACT = \alpha$, тогда получаем $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{8}{17}$, откуда $\sin \alpha = \frac{8}{17}$. В силу равенства прямоугольных треугольников ABH и CBT по гипотенузе и острому углу находим:

$$\begin{aligned} BH &= BT = AB \cdot \cos \angle ABC = 17 \cos(180^\circ - 2\angle BAC) = \\ &= 17 \cos 2\alpha = 17(1 - 2\sin^2 \alpha) = 17 - 34 \cdot \frac{64}{289} = 17 - \frac{128}{17} = \frac{161}{17}. \quad BH = BT = AB \cdot \cos \angle ABC = 17 \cos(180^\circ - 2\angle BAC) = \\ &= 17 \cos 2\alpha = 17(1 - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= 17 - 34 \cdot \frac{64}{289} = 17 - \frac{128}{17} = \frac{161}{17}. \quad BH = BT = AB \cdot \cos \angle ABC = \\ &= 17 \cos(180^\circ - 2\angle BAC) = \\ &= 17 \cos 2\alpha = 17(1 - 2\sin^2 \alpha) = \\ &= 17 - 34 \cdot \frac{64}{289} = 17 - \frac{128}{17} = \frac{161}{17}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$BM = BH \cdot \cos 2\alpha = \frac{161}{17} \cdot \frac{161}{289} = \frac{161^2}{17^3}.$$

Из прямоугольного треугольника MET получаем $ME = \frac{MT}{\sin \alpha}$, а потому

$$\begin{aligned} ME &= \frac{MT}{\sin \alpha} = \frac{BT - BM}{\sin \alpha} = \frac{17}{8} \cdot \left(\frac{161}{17} - \frac{161^2}{17^3} \right) = \\ &= \frac{17}{8} \cdot \frac{161 \cdot 289 - 161 \cdot 161}{17^3} = \frac{17}{8} \cdot \frac{161 \cdot 128}{17^3} = \frac{161 \cdot 16}{17^2} = \frac{2576}{289}. \quad ME = \frac{MT}{\sin \alpha} = \frac{BT - BM}{\sin \alpha} = \\ &= \frac{17}{8} \cdot \left(\frac{161}{17} - \frac{161^2}{17^3} \right) = \frac{17}{8} \cdot \frac{161 \cdot 289 - 161 \cdot 161}{17^3} = \\ &= \frac{17}{8} \cdot \frac{161 \cdot 128}{17^3} = \frac{161 \cdot 16}{17^2} = \frac{2576}{289}. \end{aligned}$$

Ответ: б) $\frac{2576}{289}$.

Приведем другое доказательство пункта а).

Углы ATC и AHC — прямые и опираются на одну сторону AC . Следовательно, точки T и H лежат на одной окружности с диаметром AC . По теореме Симсона основания перпендикуляров, проведенных из случайной точки описанной окружности треугольника, проведенных к его сторонам или их продолжениям, лежат на одной прямой — прямой Симсона. Перпендикуляры, проведенные из точки H , лежащей на описанной окружности треугольника ATC , пересекают сторону AT на ее продолжении за точку T в точке M и сторону AC в точке K соответственно. Следовательно, перпендикуляр, проведенный из точки H к стороне CT , пересекает эту сторону в точке, лежащей на прямой $МК$. Это точка E .

Следовательно, прямая HE перпендикулярна прямой CT . Прямая CT перпендикулярна прямым AB и HE , а потому прямые AB и HE параллельны.

№ 18.

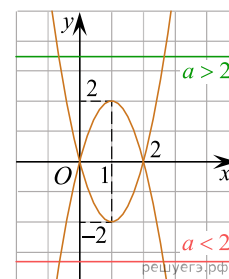
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 & 16x^2(x-1) = (2x^2-a)(a+2x^2) \Leftrightarrow 16x^3 - 16x^2 = 4x^4 - a^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2 = 4x^4 - 16x^3 + 16x^2 \Leftrightarrow a^2 = 4x^2(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow a^2 = 4x^2(x-2)^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x(x-2), \\ a = -2x(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x^2 - 4x, \\ a = -2x^2 + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(x-1)^2 - 2, \\ a = -2(x-1)^2 + 2. \end{cases} \quad 16x^2(x-1) = (2x^2-a)(a+2x^2) \Leftrightarrow 16x^3 - 16x^2 = 4x^4 - a^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2 = 4x^4 - 16x^3 + 16x^2 \Leftrightarrow a^2 = 4x^2(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2 = 4x^2(x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x(x-2), \\ a = -2x(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x^2 - 4x, \\ a = -2x^2 + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(x-1)^2 - 2, \\ a = -2(x-1)^2 + 2. \end{cases} \quad 16x^2(x-1) = (2x^2-a)(a+2x^2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 16x^3 - 16x^2 = 4x^4 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = 4x^4 - 16x^3 + 16x^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2 = 4x^2(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2 = 4x^2(x-2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x(x-2), \\ a = -2x(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x^2 - 4x, \\ a = -2x^2 + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(x-1)^2 - 2, \\ a = -2(x-1)^2 + 2. \end{cases} \quad 16x^2(x-1) = (2x^2-a)(a+2x^2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 16x^3 - 16x^2 = 4x^4 - a^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2 = 4x^4 - 16x^3 + 16x^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow a^2 = 4x^2(x^2 - 4x + 4) \Leftrightarrow a^2 = 4x^2(x-2)^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x(x-2), \\ a = -2x(x-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x^2 - 4x, \\ a = -2x^2 + 4x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(x-1)^2 - 2, \\ a = -2(x-1)^2 + 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Графиком уравнения $y = 2(x-1)^2 - 2$ является парабола с вершиной в точке $(1; -2)$, которая пересекает ось Ox в точках с координатами $(0; 0)$ и $(2; 0)$. Графиком уравнения $y = -2(x-1)^2 + 2$ является та же парабола, отраженная относительно оси Ox .

Для того, чтобы исходное уравнение имело ровно два корня, горизонтальная прямая $y = a$ должна пересекать параболы в двух различных точках. Из рисунка видно, что это происходит, если $a < -2$, то есть прямая пересекает только ветви синей параболы ниже точки вершины оранжевой; если $a = 0$, то есть прямая проходит через две точки пересечения парабол; и если $a > 2$, то есть прямая пересекает только ветви оранжевой параболы выше точки вершины синей.



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \{0\} \cup (2; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Если разложение числа на простые множители имеет вид $p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_x^{k_x}$, оно имеет $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_x + 1)$ делителей.

Уравнение

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_x + 1) = 21$$

превращается в тождество при $x = 1$, $k_1 = 20$ и при $x = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 6$. То есть число имеет вид либо p^{20} , либо $p^2 q^6$, где p, q — простые.

а) Да. Например, можно взять $n = 3^2 \cdot 7^6$.

б) Делителями $14n$, в частности, являются все делители n , поэтому их не менее 21.

в) Число $n = 2^2 \cdot 7^6$ имеет ровно 21 делитель, при этом $14n = 2^3 \cdot 7^7$ имеет $4 \cdot 8 = 32$ делителя.

Если взять число вида $p^2 q^6$ или p^{20} не кратным 2, количество делителей как минимум удвоится (можно взять все старые делители и все старые делители, умноженные на 2 — все они будут различны). Аналогично и в случае, когда это число не кратно 7. Значит, оно кратно и 2, и 7 поэтому равно $2^2 \cdot 7^6$ или $7^2 \cdot 2^6$. Для них ответы одинаковы.

Ответ: а) да; б) нет; в) 32.