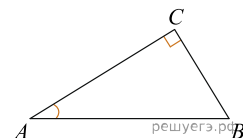


Вариант 149

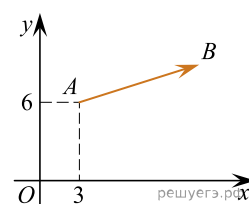
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 8$, $\operatorname{tg} A = 0,5$. Найдите BC .



№ 2.

Вектор $\vec{AB}$ с началом в точке $A(3; 6)$ имеет координаты $(9; 3)$. Найдите сумму координат точки B .



№ 3.

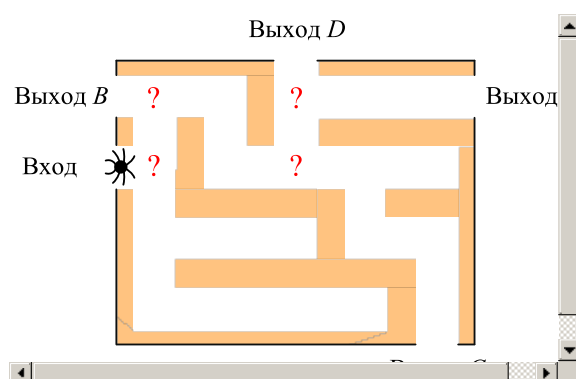
В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро $AB = 2$, ребро $AD = \sqrt{5}$, ребро $AA_1 = 2$. Точка K — середина ребра BB_1 . Найдите площадь сечения, проходящего через точки A_1, D_1 и K .

№ 4.

В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме «Неравенства». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Неравенства».

№ 5.

На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D .



№ 6.

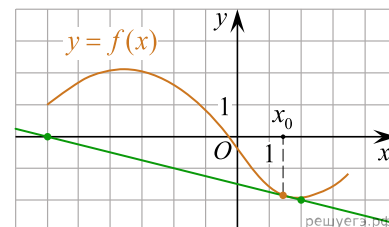
Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

№ 7.

Найдите значение выражения $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 9.

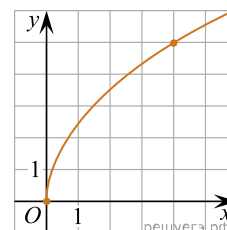
Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, $x(\text{м})$ — смещение камня по горизонтали, $y(\text{м})$ — высота камня над землей. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

№ 10.

Имеется два сплава. Первый содержит 15% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 140 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 3,5$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 6x + 12)$ на отрезке $[-19; -1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $2 \sin x \cos^2 x - \sqrt{2} \sin 2x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны углы: $\angle C_1 A A_1 = \alpha$, $\angle C_1 A B = \beta$, $\angle C_1 A D = \gamma$.

а) Докажите, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

б) Найдите угол между прямой AC_1 и плоскостью $A_1 B_1 C_1$, если $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{1 - \sqrt{1 - 4 \log_8^2 x}}{\log_8 x} < 2$.

№ 16.

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 8 млн рублей.

№ 17.

Окружность, вписанная в равнобедренную трапецию $ABCD$, касается ее боковой стороны CD в точке M . Луч AM вторично пересекает окружность в точке N , а прямую BC в точке K , причем $AN = 4$, $MN = 12$.

а) Докажите, что $\angle AMD = \angle MCK$.

б) Найдите основания трапеции.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$$

больше -4 ?

№ 19.

Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из натуральных чисел, причем $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n .

а) Может ли выполняться равенство $4a_5 = 7a_4$?

б) Может ли выполняться равенство $5a_5 = 7a_4$?

в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство $6na_{n+1} = (n^2 + 24)a_n$?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27243	4
2	27726	21

3	315131	5
4	285927	0.6
5	320212	0.0625
6	26668	-9
7	502305	-3
8	27506	-0.25
9	27961	90
10	526011	70
11	509118	1.96
12	502312	-1

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. По основному тригонометрическому тождеству $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Обозначим $t = \sin x$, тогда

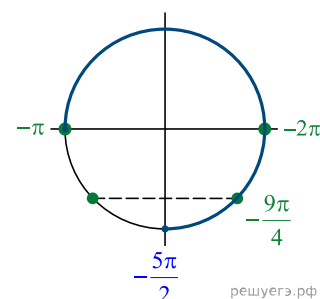
$$2t^3 + t + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(1 - t^2) \Leftrightarrow 2t^3 + 2\sqrt{2}t^2 + t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t(2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1) = 0 \Leftrightarrow t(\sqrt{2}t + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \end{cases}$$

Чтобы отобрать корни, лежащие на заданном отрезке, воспользуемся тригонометрической окружностью (см. рис.). Получим корни $-\frac{9\pi}{4}$, -2π , $-\pi$.



Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \pi k, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$, -2π , $-\pi$.

Примечание.

Мы решили уравнение $2t^2 + 2\sqrt{2}t + 1 = 0$, записав левую часть в виде полного квадрата $(\sqrt{2}t + 1)^2$. Можно было найти дискриминант $D = (2\sqrt{2})^2 - 8 = 0$ и прийти к выводу, что уравнение имеет единственный корень

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{2\sqrt{2}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

№ 14.

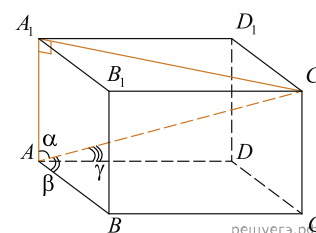
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из прямоугольных треугольников AA_1C_1 , ABC_1 , ADC_1 соответственно находим:

$$\cos \alpha = \frac{AA_1}{AC_1},$$

$$\cos \beta = \frac{AB}{AC_1},$$

$$\cos \gamma = \frac{AD}{AC_1}.$$



Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его измерений, поэтому:

$$AC_1^2 = AA_1^2 + AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow 1 = \left(\frac{AA_1}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AC_1}\right)^2 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

$$\begin{aligned} AC_1^2 = AA_1^2 + AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow 1 &= \left(\frac{AA_1}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AC_1}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad AC_1^2 = AA_1^2 + AB^2 + AD^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = \left(\frac{AA_1}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC_1}\right)^2 + \left(\frac{AD}{AC_1}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \end{aligned}$$

б) Из доказанного в пункте а) находим:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ &= 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos^2 \alpha &= \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 60^\circ + \cos^2 45^\circ = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 \alpha + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ. \end{aligned}$$

Из прямоугольного треугольника AC_1A_1 получаем $\angle AC_1A_1 = 30^\circ$. Отрезок A_1C_1 есть проекция диагонали AC_1 на плоскость $A_1B_1C_1$, следовательно, угол AC_1A_1 — искомый.

Ответ: б) 30° .

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. После замены $t = \log_8 x$ получаем $\frac{1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t}{t} < 0$. Значит,

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t > 0, \\ t < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t < 0, \\ t > 0. \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t > 0, \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4t^2 < 4t^2 - 4t + 1, \\ 4t^2 \leq 1, \\ t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq t < 0.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$-\frac{1}{2} \leq \log_8 x < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} \leq x < 1.$$

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 4t^2} - 2t < 0, \\ t > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4t^2 > 4t^2 - 4t + 1, \\ 4t^2 \leq 1, \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$0 < \log_8 x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 < x < \sqrt{8}.$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}; 1\right) \cup (1; \sqrt{8})$.

Ответ: $\left[\frac{\sqrt{2}}{4}; 1\right) \cup (1; \sqrt{8})$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. Обозначим размер кредита за S млн рублей. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает по $0,2S$. Всего $0,4S$ за два года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 3-го года долг возрастает до $1,2S$. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 3-го и 4-го годов. После выплаты в конце 3-го года долг равен $1,2S - x$, в середине 4-го года он равен $1,2(1,2S - x)$. В конце 4-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1,2(1,2S - x)$ и по условию равна x .

Значит,

$$1,2(1,2S - x) = x \Leftrightarrow 2,2x = 1,44S \Leftrightarrow x = \frac{36S}{55},$$

и общий размер выплат равен

$$0,4S + 2 \cdot \frac{36S}{55} = \frac{94S}{55}.$$

По условию

$$\frac{94S}{55} > 8 \Leftrightarrow 94S > 440 \Leftrightarrow S > 4\frac{32}{47}.$$

Наименьшее целое $S = 5$.

Ответ: 5млнруб.

№ 17.

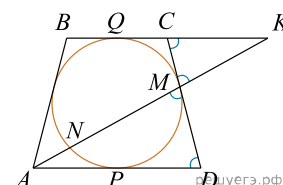
Критерии оценивания выполнения задания	баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка F — точка касания окружности с основанием AD . Квадрат длины касательной равен произведению длины секущей на длину ее внешней части, поэтому $AP^2 = AN \cdot AM$, откуда $AP^2 = 4 \cdot 16$, то есть $AP = 8$.

Точка F — середина основания AD в силу симметрии, поэтому $AD = 16$. Следовательно, $AD = AM$, треугольник ADM — равнобедренный. Тогда углы AMD и ADM равны, а последний, в свою очередь, равен углу MCK как накрест лежащий при параллельных прямых BK и AD и секущей CD . Таким образом, $\angle AMD = \angle ADM = \angle MCK$.

б) Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны: $MD = PD = 8$. Пусть точка Q — точка касания окружности с основанием BC . Пусть также $CQ = CM = x$. Треугольники ADM и KCM подобны по двум углам, поэтому $\frac{AD}{KC} = \frac{DM}{CM}$, откуда $\frac{KC}{CM} = \frac{AD}{DM} = \frac{2}{1}$, то есть $CK = 2x$. Квадрат длины касательной равен произведению длины секущей на длину ее внешней части, следовательно, $KQ^2 = KM \cdot KN$. Получаем:

$$\begin{aligned} (2x+x)^2 &= 2x \cdot (2x+12) \Leftrightarrow 9x^2 = 4x^2 + 24x \Leftrightarrow 5x^2 = 24x \Leftrightarrow 5x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5}, \quad (2x+x)^2 = 2x \cdot (2x+12) \Leftrightarrow 9x^2 = 4x^2 + 24x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5x^2 = 24x \Leftrightarrow 5x = 24 \Leftrightarrow x = \frac{24}{5}. \end{aligned}$$



Таким образом, $BC = 2CQ = 2x = \frac{48}{5}$.

Ответ: б) $16\frac{48}{5}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но некоторые граничные точки включены/исключены неверно	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Заметим, что наименьшее значение функции больше -4 , если все значения функции больше -4 . Заданная функция непрерывна и на бесконечностях стремится к плюс бесконечности. Поэтому при любом значении параметра она достигает своего наименьшего значения. Тогда задачу можно переформулировать так: требуется найти все значения a , при каждом из которых неравенство

$$x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a| > -4 \quad (*)$$

выполняется при всех значениях x .

Запишем неравенство в виде

$$|(x-a)(x-a-2)| > -4 - x + 2|x|$$

и построим графики левой и правой частей неравенства $t(x) = |(x-a)(x-a-2)|$ и $s(x) = -4 - x + 2|x|$.

График функции $t(x)$ — парабола с отраженной отрицательной частью, перемещающаяся по оси абсцисс, с корнями $x=a$ и $x=a+2$.

График функции $s(x) = \begin{cases} -4 - 3x, & \text{при } x < 0, \\ -4 + x, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$ — изображённая на рисунке ломаная (выделена синим цветом).

Для выполнения неравенства (*) необходимо, чтобы все точки графика $y=t(x)$ располагались выше графика $y=s(x)$. Граничные способы подходящего расположения подвижного графика $y=t(x)$ изображены на рисунке зелёным и красным цветом. Определим значения параметра для этих границ.

Левую границу найдём из условия касания прямой, задаваемой уравнением $y = -3x - 4$, и параболы, задаваемой уравнением $y = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a$. Они имеют единственную общую точку, а значит, уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a = -3x - 4$ имеет единственное решение. Запишем его в виде $x^2 - (2a-1)x + a^2 + 2a + 4 = 0$ и найдём дискриминант полученного уравнения:

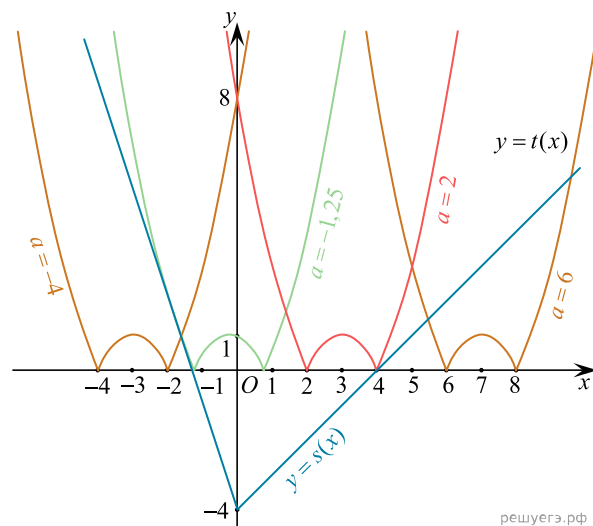
$$D = (2a-1)^2 - 4 \cdot (a^2 + 2a + 4) = -12a - 15.$$

Он обращается в нуль при $a = -1,25$.

Правая граница достигается, если больший корень функции $t(x)$ равен 4: $a+2=4$, откуда $a=2$.

Таким образом, неравенство (*) выполняется при всех значениях x , если $-1,25 < a < 2$.

Ответ: $-1,25 < a < 2$.



Примечание.

По просьбе Сергея Волкова покажем, как определить, не пользуясь рисунком, какое условие надо рассматривать для определения границы расположения подвижного графика: условие касания параболы и прямой или условие прохождения прямой через корень параболы.

Парабола задается уравнением $y = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a$. Заметим, что $y' = 2x - 2(a+1)$, причем $y'(a) = -2$, $y'(a+2) = 2$, и производная возрастает на всей числовой оси. Для касания параболы и прямой необходимо, чтобы угловой коэффициент касательной был равен значению производной. Следовательно, если угловой коэффициент прямой меньше -2 , то для определения граничного условия надо рассматривать касание прямой и левой ветви параболы. Если угловой коэффициент прямой больше 2 , то необходимо рассматривать касание прямой и правой ветви параболы. Если же угловой коэффициент прямой находится в пределах от -2 до 2 , то касание прямой и параболы будет в точке, расположенной на отрицательной части параболы, но эта часть симметрично отображена относительно оси абсцисс, следовательно, необходимо рассматривать условие прохождения прямой через корень параболы.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть $a_1 = 2$ и $a_2 = 1$. Тогда $a_3 = 2 + 1 = 3$, $a_4 = 1 + 3 = 4$, $a_5 = 3 + 4 = 7$ и $4a_5 = 7a_4$.

б) Предположим, что $5a_5 = 7a_4$. Тогда $a_5 = 7a$ и $a_4 = 5a$, где $a = \frac{a_5}{7} > 0$. Имеем

$a_3 = a_5 - a_4 = 2a$, $a_2 = a_4 - a_3 = 3a$ и $a_1 = a_3 - a_2 = -a < 0$. Получаем противоречие.

в) Пример последовательности 3, 8, 11, 19, 30, 49, ... показывает, что равенство $6na_{n+1} = (n^2 + 24)a_n$ может выполняться при $n = 5$. Действительно, для такой последовательности выполнены условия задачи и $30a_6 = 49a_5$.

Пусть $n \geq 6$ и $6na_{n+1} = (n^2 + 24)a_n$. Положим $a = \frac{a_n}{6n} > 0$.

Имеем:

$$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = (n^2 - 6n + 24)a;$$

$$a_{n-2} = a_n - a_{n-1} = (-n^2 + 12n - 24)a;$$

$$a_{n-3} = a_{n-1} - a_{n-2} = (2n^2 - 18n + 48)a;$$

$$a_{n-4} = a_{n-2} - a_{n-3} = -3(n^2 - 10n + 24)a.$$

$a_{n-4} > 0$, поэтому получаем, что $n^2 - 10n + 24 = (n-4)(n-6) < 0$. Следовательно, $n = 5$. Полученное противоречие показывает, что при $n \geq 6$ равенство $6na_{n+1} = (n^2 + 24)a_n$ выполняться не может.

Ответ: а) да; б) нет; в) при $n = 5$.