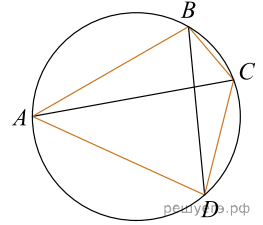


Вариант 150

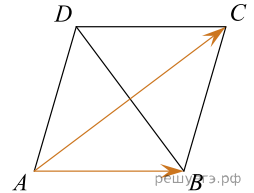
№ 1.

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABD равен 61° , угол CAD равен 37° . Найдите угол ABC . Ответ дайте в градусах.



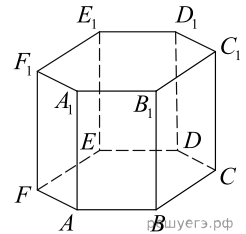
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AB} - \vec{AC}$.



№ 3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние между точками A и E_1 .



№ 4.

Симметричную игральную кость бросили 3 раза. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Какова вероятность события «хотя бы раз выпало 3 очка»?

№ 5.

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов— математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов— математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент $З.$ получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку— 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что $З.$ сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

№ 6.

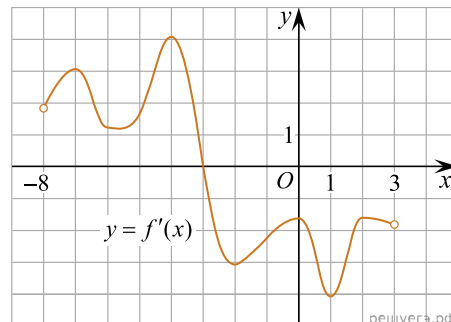
Найдите корень уравнения $\frac{x+89}{x-7} = \frac{-5}{x-7}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(7x^3)^2 : (7x^6)$.

№ 8.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



№ 9.

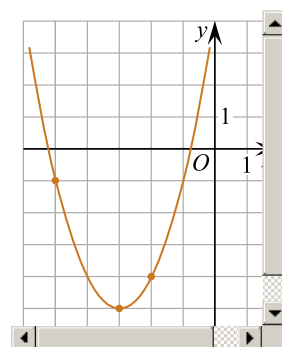
Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^a = \text{const}$, где p (Па) — давление газа, V — объем газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение в два раза объема газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

№ 10.

В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = x^7 + 5x^3 - 16$ на отрезке $[-9; 1]$.

№ 13.

- а) Решите уравнение $\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}(1-\cos x)} = -\sin(-x) - 5\cos x$.
- б) Укажите корни этого уравнения принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.
-

№ 14.

Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно.

- а) Докажите, что прямые $B_1 P$ и QB перпендикулярны.
- б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ , если ребро куба равно 10.
-

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{320 - 4^{-x-1}}{128 - 2^{-x}} \geq 2,5$.

№ 16.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 900 000 рублей на 13 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа с 1 по 12 месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму;
- 15-го числа 13 месяца долг должен быть погашен.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 12 месяца, если всего было выплачено 1134 тысяч рублей?

№ 17.

Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC с углом 45° при вершине C .

- а) Докажите, что треугольник $A_1 B_1 C_1$ прямоугольный.
- б) Найдите отношение, в котором высота AA_1 делит отрезок $B_1 C_1$, если $BC = 2B_1 C_1$.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2ax + 7| = |6a - x^2 - 2x - 1|$$

имеет более двух корней.

№ 19.

В футбольном турнире участвовало 10 команд, при этом каждая команда играла с каждой ровно по одному разу. За победу в одной игре команде присуждается 3 очка, за ничью — одно очко, за поражение — 0.

а) Команда «Легион», участвовавшая в этом турнире, набрала 17 очков. Сколько матчей она могла завершить вничью?

б) Сколько матчей всего было завершено вничью, если сумма очков, набранных всеми командами в сумме, в 60 раз больше количества очков, набранных одной из команд?

в) Найдите наибольшее возможное число ничьих на турнире, если любые две команды, сыгравшие между собой вничью, набрали в итоге разное количество очков, причем найдется команда, завершившая ровно 6 матчей вничью?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	525110	98
2	27716	10
3	245364	2
4	621760	0,6
5	320199	0,408
6	689090	-94
7	26815	7
8	27491	-3
9	27992	2
10	99565	47088
11	508935	31
12	520207	-10

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Заметим, что

$$x = \begin{cases} \sqrt{x^2}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\sqrt{x^2}, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

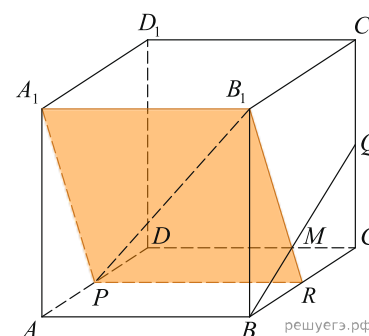
поэтому, внося $\sin x$ под знак корня, необходимо рассмотреть два случая:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проведём отрезок B_1R , параллельный A_1P . Пусть M — точка пересечения отрезков B_1R и QB . Треугольник BMR прямоугольный с прямым углом при вершине M . Это следует из равенства треугольников RB_1B и QBC . Значит, прямые QB и B_1R перпендикулярны. Прямые QB и PR перпендикулярны, поскольку прямая PR перпендикулярна плоскости BCC_1 . Поэтому прямая QB перпендикулярна плоскости A_1B_1P , и, следовательно, прямая QB перпендикулярна прямой B_1P .

б) Указанное сечение — прямоугольник A_1B_1RP . Его площадь равна $A_1B_1 \cdot A_1P = 50\sqrt{5}$.



Ответ: б) $50\sqrt{5}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $y = 2^{-x}$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{320 - 0,25y^2}{128 - y} \geq 2,5 &\Leftrightarrow \frac{-0,25y^2 + 2,5y}{128 - y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{0,25y(y - 10)}{128 - y} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 10, \\ y > 128. \end{cases} \\ \frac{320 - 0,25y^2}{128 - y} \geq 2,5 &\Leftrightarrow \frac{-0,25y^2 + 2,5y}{128 - y} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{0,25y(y - 10)}{128 - y} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 10, \\ y > 128. \end{cases} \end{aligned}$$

Вернемся к исходной переменной, получим:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 \leq 2^{-x} \leq 10, \\ 2^{-x} > 128 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-x} \leq 10, \\ 2^{-x} > 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2^x} \leq 10, \\ \frac{1}{2^x} > 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq \frac{1}{10}, \\ 2^x < \frac{1}{128} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\log_2 10, \\ x < -7. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq 2^{-x} \leq 10, \\ 2^{-x} > 128 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-x} \leq 10, \\ 2^{-x} > 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2^x} \leq 10, \\ \frac{1}{2^x} > 128 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \geq \frac{1}{10}, \\ 2^x < \frac{1}{128} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\log_2 10, \\ x < -7. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty, -7) \cup [-\log_2 10, +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть 15-го числа 12-го месяца долг составит x тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$900; \frac{11 \cdot 900 + x}{12}; \frac{10 \cdot 900 + 2x}{12}; \dots \frac{900 + 11x}{12}; x; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 3%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$927; 1,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12}; \dots 1,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12}; 1,03x.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$27 + \frac{900 - x}{12}; 0,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12} + \frac{900 - x}{12}; \dots 0,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12} + \frac{900 - x}{12}; 1,03x. \quad 27 + \frac{900 - x}{12}; 0,03 \cdot \frac{11 \cdot 900 + x}{12} + \frac{900 - x}{12}; \dots 0,03 \cdot \frac{900 + 11x}{12} + \frac{900 - x}{12}; 1,03x.$$

Всего следует выплатить

$$27 + 0,03 \cdot \frac{900 + x}{2} \cdot 11 + 900 - x + 1,03x = 0,195x + 1075,5 \text{ (тыс.рублей)}, \quad 27 + 0,03 \cdot \frac{900 + x}{2} \cdot 11 + 900 - x + 1,03x = 0,195x + 1075,5 \text{ (тыс.рублей)},$$

откуда $0,195x + 1075,5 = 1134 \Leftrightarrow 0,195x = 58,5 \Leftrightarrow x = 300$. Значит, 15-го числа 12-го месяца долг составит 300 тыс. рублей.

Ответ: 300.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Углы BB_1C и CC_1B прямые, поэтому точки B, B_1, C, C_1 лежат на окружности с диаметром BC . Тогда

$$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle BC_1B_1 = 180^\circ - (180^\circ - \angle C) = \angle C = 45^\circ.$$

Аналогично, $\angle BC_1A_1 = 45^\circ$. Значит,

$$\angle A_1C_1B_1 = 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

Что и требовалось доказать.

б) Из предыдущего пункта следует, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам. Коэффициент подобия равен $\frac{BC}{B_1C_1} = 2$. С другой стороны, коэффициент подобия равен $\frac{AB}{AB_1} = \frac{1}{\cos A}$. Отсюда $\cos A = \frac{1}{2}$, $\angle A = 60^\circ$. Тогда $\angle B = \angle AB_1C_1 = 75^\circ$. Пусть AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке D . Запишем две теоремы синусов — для треугольников AB_1D и AC_1D :

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{B_1D}{\sin 45^\circ} &= \frac{AD}{\sin 75^\circ}; \\ 2) \quad \frac{C_1D}{\sin 15^\circ} &= \frac{AD}{\sin 45^\circ}. \end{aligned}$$

Поделив первое равенство на второе получим следующее:

$$\frac{B_1D}{C_1D} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin^2 45^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \sin 30^\circ} = 2.$$

Ответ: б) 2 : 1.

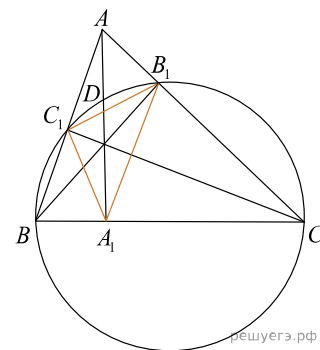
Приведем решение пункта б) Ирины Шраго.

Из предыдущего пункта следует, что треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам. Коэффициент подобия равен $\frac{BC}{B_1C_1} = 2$. С другой стороны, коэффициент подобия равен $\frac{AB}{AB_1} = \frac{1}{\cos A}$. Отсюда $\cos A = \frac{1}{2}$, $\angle A = 60^\circ$. Тогда из треугольника ABB_1 получим $\angle ABB_1 = 30^\circ$, из треугольника ACC_1 получим $\angle ACC_1 = 30^\circ$.

Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC .

Вокруг четырехугольника A_1BC_1H можно описать окружность, следовательно, $\angle C_1A_1H = \angle C_1BH$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Вокруг четырехугольника A_1CB_1H можно описать окружность, следовательно, $\angle B_1A_1H = \angle B_1CH$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Тогда $\angle B_1A_1H = \angle C_1A_1H = 30^\circ$. Следовательно, $\angle B_1A_1C_1 = 60^\circ$, AA_1 — его биссектриса. Биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. В прямоугольном треугольнике $B_1A_1C_1$ сторона B_1A_1 — гипотенуза, A_1C_1 — катет, лежащий напротив угла в 30° , следовательно,

$$\frac{B_1D}{C_1D} = \frac{B_1A_1}{A_1C_1} = \frac{2}{1}.$$



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Обоснованно получены все значения: $a = -5 - 2\sqrt{10}$, $a = -1$, $a = -5 + 2\sqrt{10}$, $a = \frac{8}{3}$. Ответ отличается от верного только включением точек $a = -5 - 2\sqrt{10}$ и/или $a = -5 + 2\sqrt{10}$.	3
Обоснованно получено одно, два или три из значений $a = -5 - 2\sqrt{10}$, $a = -1$, $a = -5 + 2\sqrt{10}$ или $a = \frac{8}{3}$.	2
Задача верно сведена к исследованию — графиков функций, заданных выражениями, стоящими в левой и правой части равенства; — квадратных уравнений, полученных после раскрытия модулей	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Преобразуем исходное уравнение:

$$\begin{aligned}(x^2 - 2ax + 7)^2 &= (6a - x^2 - 2x - 1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x^2 - 2ax + 7 - 6a + x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2ax + 7 + 6a - x^2 - 2x - 1) &= 0 \Leftrightarrow \\ (x^2 + (1 - a)x + 4 - 3a)(a + 1)(x - 3) &= 0.\end{aligned}$$

Последнее уравнение имеет более двух корней или если $a = -1$, или если уравнение $x^2 + (1 - a)x + 4 - 3a = 0$ имеет два различных корня, отличных от 3:

$$\begin{cases} (1 - a)^2 - 4 \cdot (4 - 3a) > 0, \\ 3^2 + (1 - a) \cdot 3 + 4 - 3a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 10a - 15 > 0, \\ 16 - 6a \neq 0, \end{cases}$$

откуда $a < -5 - 2\sqrt{10}$, $-5 + 2\sqrt{10} < a < \frac{8}{3}$ или $a > \frac{8}{3}$.

Исходное уравнение имеет более двух различных корней при $a < -5 - 2\sqrt{10}$, при $a = -1$, при $-5 + 2\sqrt{10} < a < \frac{8}{3}$ и при $a > \frac{8}{3}$.

Ответ: $(-\infty; -5 - 2\sqrt{10})$; -1 ; $(-5 + 2\sqrt{10}; \frac{8}{3})$; $(\frac{8}{3}; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Каждая команда провела 9 игр, поэтому всего игр было $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ (каждая игра посчитана два раза, поэтому нужно делить на 2).

а) Пусть команда выиграла x матчей и свела вничью y матчей, тогда она набрала $3x + y$ очков. Значит, $3x + y = 17$, поэтому y может принимать только значения, дающие остаток 2 при делении на 3. Возможны варианты: $y = 2$, $x = 5$; $y = 5$, $x = 4$; вариант $y = 8$, $x = 3$ — невозможен, получается минимум 11 игр, $y \geq 11$ — невозможно. Ясно, что примеры можно построить (назначив одной команде нужные результаты и назначив прочим матчам случайные).

б) Две команды за один матч получают вместе либо $3 + 0 = 3$, либо $1 + 1 = 2$ очка, поэтому за 45 матчей общая сумма очков составит от $45 \cdot 2 = 90$ до $45 \cdot 3 = 135$. Между этими числами лишь одно кратно 60 — это 120. Если вничью завершилось x матчей (а $45 - x$ завершились победой одной из команд), то команды в сумме набрали $3(45 - x) + 2x = 120$ очков, откуда $x = 15$.

в) Ясно, что есть не более одной команды, сыгравшей вничью 9 раз. Далее, есть не более двух команд, сыгравших вничью 8 раз — если их хотя бы три, то у двух из них результат единственной не ничейной партии одинаков. Тогда между собой они не могли сыграть вничью (очков поровну), но и результативно не могли. Значит, общее количество ничьих не превосходит

$$\frac{1}{2}(9 + 2 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 6) = 36\frac{1}{2},$$

поэтому оно не более 36.

Приведем пример для 36 ничьих. Пусть выигрышами первой упомянутой в паре команды завершились матчи 2 — 3, 3 — 4, 4 — 2, 5 — 10, 7 — 8, 7 — 10, 9 — 6, 9 — 8, 9 — 10, а остальные закончились вничью. Тогда у второй, тре-

твей и четвертой команд по 10 очков и между ними нет ничьих, а результаты прочих команд не повторяются (первая — 9 очков, пятая — 11, шестая — 8, далее 13, 7, 15 и 6).

Ответ: а) 2, 5; б) 15; в) 36.
