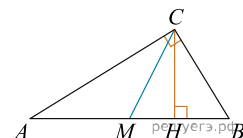


# Вариант 153

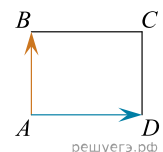
№ 1.

Острый угол  $B$  прямоугольного треугольника равен  $66^\circ$ . Найдите угол между высотой  $CH$  и медианой  $CM$ , проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



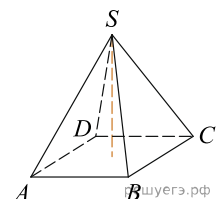
№ 2.

Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 8. Найдите длину разности векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{AD}$ .



№ 3.

Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6, а основание — прямоугольник со сторонами 3 и 4.



№ 4.

В классе 26 учащихся, среди них два друга — Андрей и Сергей. Учащихся случайным образом разбивают на 2 равные группы. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

№ 5.

В кармане у Пети было 2 монеты по 5 рублей и 4 монеты по 10 рублей. Петя не глядя переложил какие-то 3 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что пятирублевые монеты лежат теперь в разных карманах.

№ 6.

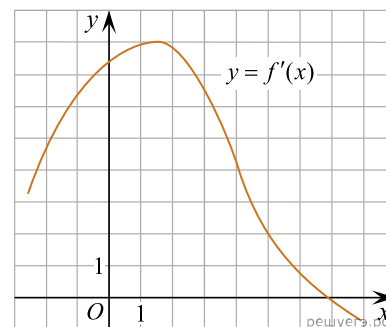
Решите уравнение  $x^2 + 9 = (x + 9)^2$ .

№ 7.

Найдите значение выражения  $\frac{5 \sin 98^\circ}{\sin 49^\circ \cdot \sin 41^\circ}$ .

№ 8.

На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 2x - 2$  или совпадает с ней.



№ 9.

Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте  $h$  м над землей, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле  $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$ , где  $R = 6400$  км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 6,4 километров?

№ 10.

Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

№ 11.

На рисунке изображен график функции вида  $f(x) = a^x$ . Найдите значение  $f(4)$ .

№ 12.

Найдите наибольшее значение функции  $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$  на отрезке  $[-3; 3]$ .

№ 13.

а) Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 7x = \sqrt{2} \sin x$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$ .

№ 14.

Дана правильная треугольная пирамида.

а) Докажите, что её противоположные ребра перпендикулярны.

б) Пусть косинус угла между боковой гранью и основанием равен  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ . Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

№ 15.

Решите неравенство:  $\frac{3^{x^2+x} - 4\sqrt{3^{x^2+x}} + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{x+4}} \leq 0$ .

№ 16.

Анатолий решил взять кредит в банке 331000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Существуют две схемы выплаты кредита.

По первой схеме банк в конце каждого месяца начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Анатолий переводит в банк фиксированную сумму и в результате выплачивает весь долг тремя равными платежами (аннуитетные платежи).

По второй схеме тоже сумма долга в конце каждого месяца увеличивается на 10%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Анатолием. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину (дифференцированные платежи). Какую схему выгоднее выбрать Анатолию? Сколько рублей будет составлять эта выгода?

№ 17.

В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  диагональ  $AC$  является биссектрисой угла  $BAD$  и пересекается с диагональю  $BD$  в точке  $E$ . Известно, что около четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность.

а) Докажите, что  $AE \cdot AC = AD \cdot AB$ .

б) Найдите  $AE$ , если известно, что  $BC = 7$ ,  $CE = 4$ .

№ 18.

При каких значениях параметра  $a$  для любых значений параметра  $b$  хотя бы при одном значении параметра  $c$  система уравнений

$$\begin{cases} bx + y = ac^2, \\ x + by = ac + 1 \end{cases}$$

имеет решения?

№ 19.

Натуральные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  удовлетворяют условию  $a > b > c > d$ .

а) Найдите числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , если  $a + b + c + d = 15$  и  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$ .

б) Может ли быть  $a + b + c + d = 19$  и  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 19$ ?

в) Пусть  $a + b + c + d = 1000$  и  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1000$ . Найдите количество возможных значений числа  $a$ .

## Ответы

| Номер | Задание                | Ответ |
|-------|------------------------|-------|
| 1     | <a href="#">27772</a>  | 42    |
| 2     | <a href="#">27709</a>  | 10    |
| 3     | <a href="#">27176</a>  | 24    |
| 4     | <a href="#">320192</a> | 0,48  |

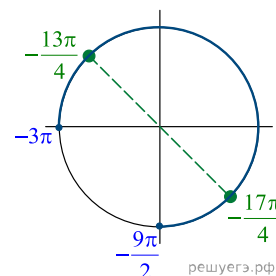
|    |                        |        |
|----|------------------------|--------|
| 5  | <a href="#">500998</a> | 0.6    |
| 6  | <a href="#">77370</a>  | -4     |
| 7  | <a href="#">77412</a>  | 10     |
| 8  | <a href="#">40130</a>  | 5      |
| 9  | <a href="#">27985</a>  | 1.4    |
| 10 | <a href="#">99586</a>  | 320000 |
| 11 | <a href="#">639480</a> | 0.0625 |
| 12 | <a href="#">77450</a>  | 23     |

№ 13.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                      | Баллы    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.                                                                                                                                                         | 2        |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а),<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки,<br>но при этом имеется верная последовательность всех<br>шагов решения пункта а) и пункта б). | 1        |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                        | 0        |
| <b>Максимальный балл</b>                                                                                                                                                                                    | <b>2</b> |

**Решение.** а) Применим формулу приведения, понизим порядок уравнения, используем формулу косинуса суммы. Получаем:

$$\begin{aligned}
 1 - 4\cos^2\left(x - \frac{5\pi}{12}\right) &= \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow 1 - 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\left(1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right) - 1 &= \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\left(1 - 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right) - 1 &= \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 &= \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) - 1 &= \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x - 1 = \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x - 1 &= \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Корни, принадлежащие заданному отрезку, отберем при помощи тригонометрической окружности. Получим числа  $-\frac{17\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}$ .

Ответ: а)  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{17\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}$ .

№ 14.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                              | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б) | 3     |
|                                                                                                     |       |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а), и<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный<br>ответ из-за арифметической ошибки                                                                                               | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а),<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный<br>ответ из-за арифметической ошибки.<br><br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с исполь-<br>зованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не<br>выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, при-<br>ведённых выше                                                                                                                                                                                                                            | 0 |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3 |

**Решение.** а) Пусть  $SABC$  — данная пирамида с вершиной  $S$ .  $SH$  — ее высота,  $M$  — середина  $BC$ . Проекцией прямой  $AS$  на плоскость основания пирамиды является прямая  $AM$ . Но  $AM$  — высота треугольника  $ABC$ , поэтому  $AM \perp BC$ . Следовательно, по теореме о трех перпендикулярах,  $AS \perp BC$ . Аналогично доказывается, что  $BS \perp AC, CS \perp AB$ .

б) Пусть  $CK$  — высота равнобедренного треугольника  $BSC$ , а  $AK$  — равного ему треугольника  $ASB$ . Таким образом, искомый угол  $AKC$ . Угол  $SMH$  — угол между боковой гранью пирамиды и основанием.

Пусть  $SM = 6a$ , тогда

$$MH = SM \cos \angle SMH = a\sqrt{6}, \quad AM = 3a\sqrt{6},$$

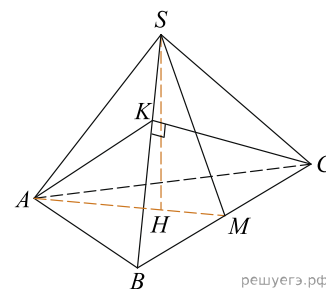
$$BC = 6a\sqrt{2}, \quad SB = \sqrt{BM^2 + SM^2} = 3a\sqrt{6}.$$

Заметим, что площадь треугольника  $BSC$  может быть вычислена двумя способами:  
 $S_{BSC} = \frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{1}{2} CK \cdot SB$ . Значит,  $CK = 4a\sqrt{3}$ .

Теперь мы можем найти искомый угол  $AKC$  при вершине равнобедренного треугольника

$$\cos \angle AKC = \frac{2KC^2 - AC^2}{2KC^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{1}{4}$ .



№ 15.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                   | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                         | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек,<br><br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                     | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                        | 2     |

**Решение.** Преобразуем неравенство:

$$\frac{3x^2+x-4\sqrt{3^{x^2+x}}+3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3^{x^2+x}}-1)(\sqrt{3^{x^2+x}}-3) \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x-0)(x^2+x-2) \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+x-4\sqrt{3^{x^2+x}}+3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}} \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3^{x^2+x}}-1)(\sqrt{3^{x^2+x}}-3) \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x-0)(x^2+x-2) \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3x^2+x-4\sqrt{3^{x^2+x}}+3}{\sqrt{x}-\sqrt{x+4}} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{3^{x^2+x}}-1)(\sqrt{3^{x^2+x}}-3) \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+x-0)(x^2+x-2) \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x^2+x-2 \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $\{0\} \cup [1; +\infty)$ .

№ 16.

| Критерии оценивания выполнения задания                              | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                            | 2     |

Решение. Рассмотрим первую схему. Пусть  $x$  руб. — фиксированная сумма ежемесячных выплат.

| Который отчетный месяц? | Долг к концу месяца с учетом начисленных процентов (руб.) | Анатолий переводит в банк (руб.) | Долг Анатолия на начало следующего месяца (руб.) |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------|
| Первый                  | $331000 \cdot 1,1 = 364100$                               | $x$                              | $364100 - x$                                     |
| Второй                  | $(364100 - x) \cdot 1,1 = 400510 - 1,1x$                  | $x$                              | $400510 - 2,1x$                                  |
| Третий                  | $(400510 - 2,1x) \cdot 1,1 = 440561 - 2,31x$              | $x$                              | $440561 - 3,31x = 0$                             |

$$3,31x = 440561 \Leftrightarrow x = 133100 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = 399300.$$

Теперь рассмотрим вторую схему.

| Который отчетный месяц? | Анатолий должен перевести в банк        |                                                        |                                                         |
|-------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
|                         | Часть кредита по основному долгу (руб.) | Процентные ставки банка                                | Всего (руб.)                                            |
| Первый                  | $\frac{331000}{3}$                      | $331000 \cdot 0,1 = 33100$                             | $\frac{331000}{3} + 33100 = \frac{430300}{3}$           |
| Второй                  | $\frac{331000}{3}$                      | $\frac{331000 \cdot 0,1 \cdot 2}{3} = \frac{66200}{3}$ | $\frac{331000}{3} + \frac{66200}{3} = 132400$           |
| Третий                  | $\frac{331000}{3}$                      | $\frac{331000 \cdot 0,1}{3} = \frac{33100}{3}$         | $\frac{331000}{3} + \frac{33100}{3} = \frac{364100}{3}$ |

Итак, если Анатолий воспользуется второй схемой, то он в банк должен будет вернуть сумму, равную

$$\frac{430300}{3} + 132400 + \frac{364100}{3} = \frac{794400}{3} + 132400 = 397200 \text{ (руб.)}$$

А эта сумма меньше, чем 399300, на 2100руб.

Замечание:

Эту разницу можно было бы вычислить и так:

$$1) \quad \Phi = \frac{331000 \cdot 1,1^3}{1,1^2 + 1,1 + 1} = \frac{331000 \cdot 1,331}{3,31} = 1,331 \cdot 100000 = 133100;$$

$$2) \quad 3\Phi = 399300;$$

$$3) \quad 331000 + 331000 \cdot 0,1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) = 331000 + 33100 \cdot 2 = 331000 + 66200 = 397200;$$

$$4) \quad 399300 - 397200 = 2100.$$

Ответ: выгодна вторая схема; 2100 рублей.

№ 17.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                            | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                                | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br><br>ИЛИ<br><br>имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                              | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а)<br><br>ИЛИ<br><br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.<br><br>ИЛИ<br><br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                                 | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                                                                                                                          | 3     |

Решение. а) Углы  $BCA$  и  $BDA$  равны как вписанные углы, углы  $BAC$  и  $CAD$  равны по условию, следовательно, треугольники  $BAC$  и  $EAD$  подобны по двум углам. Значит,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} \Leftrightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AD,$$

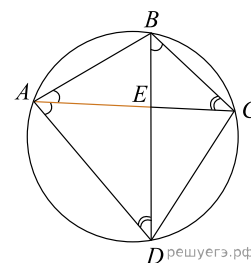
что и требовалось доказать.

б) Пусть  $AE = x$ . Углы  $DBC$  и  $DAC$  равны как вписанные углы, тогда треугольники  $ABC$  и  $BEC$  подобны по двум углам, откуда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{EC} \Leftrightarrow AC = \frac{BC^2}{EC} = \frac{49}{4},$$

$$AE = AC - EC = \frac{49}{4} - 4 = \frac{33}{4}.$$

Ответ:  $\frac{33}{4}$ .



D решуегэ.рф

| Критерии оценивания ответа на задание С5                                                                                         | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ.                                                                                                | 4     |
| Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или опisku. | 3     |
| Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.                                                     | 2     |
| Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.                           | 1     |
| Все прочие случаи.                                                                                                               | 0     |
| Максимальное количество баллов                                                                                                   | 4     |

Решение. Ясно, что при  $b=0$  система имеет единственное решение

$$\begin{cases} y = ac^2, \\ x = ac + 1, \end{cases}$$

которое выражается через  $a$  и  $c$  однозначно, то есть существует для любых  $a$  и  $c$ .

При  $b \neq 0$ , если умножить второе уравнение на  $b$  и из полученного уравнения вычесть первое уравнение системы, получим

$$(b^2 - 1)y = abc + b - ac^2.$$

Если же умножить на  $b$  первое уравнение и из полученного уравнения вычесть второе уравнение системы, то

получим

$$(b^2 - 1)x = abc^2 - ac - 1.$$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} y = ac^2 - bx, \\ (b^2 - 1)x = abc^2 - ac - 1. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы позволяет получить  $y$  по  $x$ . Следовательно, система имеет решения тогда и только тогда, когда имеет решения второе уравнение.

Уравнение  $(b^2 - 1)y = abc + b - ac^2$  имеет единственное решение при любом  $b \neq \pm 1$ . Если  $b = -1$  или  $b = 1$ , то уравнение принимает вид  $ac^2 + ac + 1 = 0$  и  $ac^2 - ac - 1 = 0$  соответственно. Исходная система будет иметь решения если существуют  $a$  и  $c$ , удовлетворяющие полученным соотношениям. При  $a = 0$  они не выполняются ни при каких значениях параметров. При  $a \neq 0$  рассмотрим их как квадратные уравнения относительно параметра  $c$ . Дискриминанты уравнений должны быть неотрицательны:  $a^2 - 4a \geq 0$  и  $a^2 + 4a \geq 0$ . Решая неравенства, находим  $a \in (-\infty; 0) \cup [4; +\infty)$  и  $a \in (-\infty; -4] \cup (0; +\infty)$ . Система должна иметь решения для любых значений  $b$ , поэтому найденные множества значений параметра  $a$  следует пересечь, получаем:  $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ .

Ответ:  $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ .

Приведём решение Николая Александрова.

Данную систему уравнений можно рассмотреть как систему двух уравнений прямых  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$ . После преобразований получим:  $y = -bx + ac^2$  и  $y = (-1/b)x + (ac + 1)/b$ . Прямые не имеют общих точек тогда и только тогда, когда выполняются условия:  $k_1 = k_2$  и  $b_1 \neq b_2$ . Находим:  $-b = (-1/b)$  и  $ac^2 \neq (ac + 1)/b$ . Из первого уравнения находим  $b = \pm 1$ . Подставляя во второе соотношение, получим квадратные уравнения относительно  $c$ :  $ac^2 - ac - 1 = 0$  и  $ac^2 + ac + 1 = 0$ . Они не имеют корней, если  $a = 0$  или если их дискриминанты отрицательны. Из условий  $a^2 + 4a < 0$  и  $a^2 - 4a < 0$  получаем  $-4 < a < 4$ . При найденных значениях  $a$  система не имеет решений. При прочих — имеет.

Проверьте себя.

Каким будет ответ на вопрос «При каких значениях параметра  $a$  хотя бы при одном значении параметра  $c$  данная система уравнений будет иметь решения для любых значений параметра  $b$ ? См. задачу [527046](#)».

№ 19.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                        | Баллы    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.                                                                                                                         | 4        |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.                                                                                                                     | 3        |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.                                                                                                                     | 2        |
| Верно получен один из следующих результатов:<br>— обоснованное решение в п. а;<br>— пример в п. б;<br>— искомая оценка в п. в;<br>— пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки. | 1        |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                          | 0        |
| <b>Максимальный балл</b>                                                                                                                                                                      | <b>4</b> |

**Решение.** а) Из условия получаем:

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 12 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) - a - b - c - d = 12 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - a - b - c - d = 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) - a - b - c - d = 12 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-b-1)(a+b) + (c-d-1)(c+d) = 12.$$

Поскольку  $a+b+c+d = 15 > 12$ , получаем:  $a = b+1$  или  $c = d+1$ .

В первом случае из равенства  $(c-d-1)(c+d) = 12$ , учитывая, что  $c-d-1 < c+d < \frac{15}{2}$  и числа  $c+d$  и  $c-d-1$  имеют разную чётность, находим  $c+d=4$ ,  $c-d-1=3$ , чего не может быть.

Во втором случае из равенства  $(a-b-1)(a+b) = 12$ , учитывая, что  $a+b > \frac{15}{2}$ , находим  $a+b=12$ ,  $a-b-1=1$ , откуда получаем:  $a=7$ ,  $b=5$ ,  $c=2$ ,  $d=1$ .

б) Из условия получаем:

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a+b+c+d \Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) = a+b+c+d \Leftrightarrow a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a+b+c+d \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-b)(a+b) + (c-d)(c+d) = a+b+c+d \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-b-1)(a+b) + (c-d-1)(c+d) = 0.$$

Поскольку  $a > b$ , получаем, что  $a \geq b+1$ , то есть  $a-b-1 \geq 0$ ,  $a+b > 0$ . Аналогично  $c-d-1 \geq 0$ ,  $c+d > 0$ , последнее равенство выполняется только при  $a=b+1$  и  $c=d+1$ . Значит,  $2b+2d+2=19$ , что невозможно.

в) Из равенства  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = a+b+c+d$  получаем:  $a = b+1$ ,  $c = d+1$ . Значит,  $2a+2d=1000$ ;  $d=500-a$ . Получаем четвёрку чисел  $(a; b; c; d) = (a; a-1; 501-a; 500-a)$ . Поскольку  $b > c$ , получаем:  $a > 251$ . Кроме того,  $d > 0$ , откуда  $a < 500$ .

Значит,  $a$  принадлежит промежутку  $(251; 500)$ . Более того, для любого целого  $a$  из этого промежутка найденная четвёрка чисел удовлетворяет условию задачи. Таким образом,  $a$  может принимать 248 значений.

Ответ: а)  $a=7$ ,  $b=5$ ,  $c=2$ ,  $d=1$ ; б) нет; в) 248.