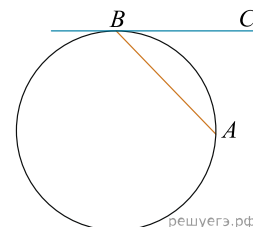


Вариант 154

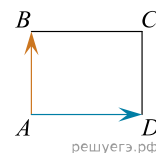
№ 1.

Хорда AB стягивает дугу окружности в 92° . Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку B . Ответ дайте в градусах.



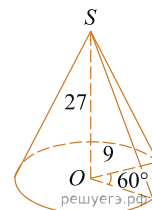
№ 2.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 8. Найдите длину разности векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.



№ 3.

Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



№ 4.

За круглый стол на 9 стульев в случайном порядке рассаживаются 7 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки не будут сидеть рядом.

№ 5.

В аэропорту два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,3. Такова же вероятность, что чай закончится во втором автомате. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,13. Найдите вероятность того, что к концу дня в одном из автоматов чай закончится, а в другом — нет.

№ 6.

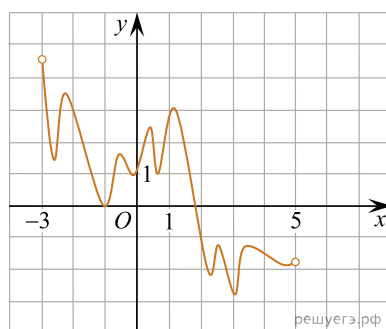
Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x-1} = 5$.

№ 7.

Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



№ 9.

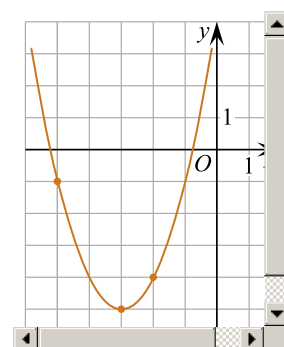
При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

№ 10.

Расстояние между городами A и B равно 470 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через 3 часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города A . Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№ 14.

Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S .

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит апофему грани ASB в отношении $2:1$, считая от вершины S .

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C , делит ребро SF , считая от вершины S .

№ 15.

Решите неравенство: $\log_{2x+4}(x^2 - 3x + 10) \geq 1$.

№ 16.

В июле 2018 года планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей необходимо взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами, и банку будет выплачено 311040 рублей?

№ 17.

Две окружности пересекаются в точках A и K так, что их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC , касается другой окружности также в точке A .

а) Докажите, что углы AKC и AKB равны.

б) Найдите площадь треугольника ABC , если $BK = 1$, $CK = 4$, а тангенс угла CAB равен $\frac{1}{\sqrt{15}}$.

№ 18.

Определите все значения параметра a при каждом из которых система

$$\begin{cases} 4^x - 2^{x+1} = a + 3, \\ \log_2(3 - x) \geq a + 4 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

№ 19.

С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают модуль разности этих цифр (например, из числа 2673 получается число 2461743).

а) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 1234774321?

б) Может ли из трехзначного числа получиться число, делящееся на 11?

в) Сколько всего существует трехзначных чисел, в десятичной записи которых отсутствуют нули, а число десятков не менее числа сотен и единиц, таких, что после выполнения указанной выше операции получится число, делящееся на 11?

Ответы

Номер	Задание	Ответ

1	27877	46
2	27709	10
3	27205	607.5
4	325913	0.75
5	320452	0.34
6	77384	0.3
7	26776	5
8	323077	10
9	27983	180000
10	99591	70
11	508935	31
12	77439	6

№ 13.

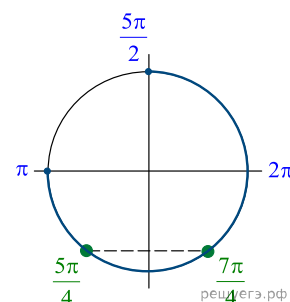
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем в исходное уравнение в виде:

$$6 - 6\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x + \sqrt{2})(3\sin x - 4\sqrt{2}) = 0.$$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Уравнение $\sin x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}.$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Обозначим за M, N середины ребер SA и SD . Поскольку MN — средняя линия треугольника SAD , то $MN \parallel AD \parallel BC$, поэтому точка B также лежит в данной плоскости. Поэтому с гранью ABS данная плоскость пересекается по прямой BM — медиане треугольника SAB . Она делит его медиану SQ (Q — середина AB) в отношении $2:1$ считая от вершины.

б) Пусть $AD \cap BF = K$, $SK \cap MN = T$. Поскольку MN — средняя линия треугольника SAD , она делит отрезок SK пополам, то есть T — середина SK . Ясно, что T лежит в данной плоскости.

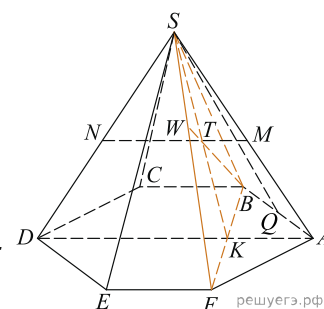
Рассмотрим теперь треугольник SBF . В нем проведена медиана SK и отмечена ее середина T . В данной плоскости лежит прямая BT , пересекающая SF в точке W . Осталось выяснить местоположение точки U .

Напишем теорему Менелая для треугольника FSK и прямой

$$WTB: \frac{FW}{WS} \cdot \frac{ST}{TK} \cdot \frac{KB}{BF} = 1,$$

откуда $\frac{FW}{WS} = 2$.

Ответ: $1:2$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек. ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. В зависимости от величины основания логарифма неравенство расщепляется на две системы:

$$\log_{2x+4}(x^2 - 3x + 10) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x+4 < 1, \\ 0 < x^2 - 3x + 10 \leq 2x+4, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4 > 1, \\ x^2 - 3x + 10 \geq 2x+4. \end{cases}$$

Решим первую систему совокупности:

$$\begin{cases} 0 < 2x+4 < 1, \\ 0 < x^2-3x+10 \leq 2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < 2x < -3, \\ x^2-3x+10 > 0, \\ x^2-5x+6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1,5, \\ (x-1,5)^2+7,75 > 0, \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x+4 < 1, \\ 0 < x^2-3x+10 \leq 2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 < 2x < -3, \\ x^2-3x+10 > 0, \\ x^2-5x+6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1,5, \\ (x-1,5)^2+7,75 > 0, \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

полученная система не имеет решений.

Значит, решение исходного неравенства совпадает с решением второй системы совокупности. Решим её:

$$\begin{cases} 2x+4 > 1, \\ x^2-3x+10 \geq 2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -3, \\ x^2-5x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1,5, \\ \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x \leq 2, \\ x \geq 3. \end{cases} \begin{cases} 2x+4 > 1, \\ x^2-3x+10 \geq 2x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > -3, \\ x^2-5x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -1,5, \\ \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x \leq 2, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-1,5; 2] \cup [3; +\infty)$.

Приведём другое решение.

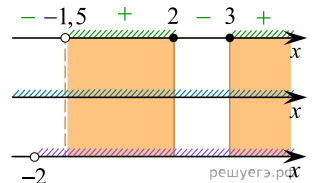
Перейдём к десятичным логарифмам и используем метод рационализации:

$$\log_{2x+4}(x^2-3x+10) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2-3x+10)}{\lg(2x+4)} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2-3x+10) - \lg(2x+4)}{\lg(2x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow \log_{2x+4}(x^2-3x+10) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x^2-3x+10)}{\lg(2x+4)} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg(x^2-3x+10) - \lg(2x+4)}{\lg(2x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3x+10-(2x+4)}{2x+4-1} \geq 0, \\ x^2-3x+10 > 0, \\ 2x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{2x+3} \geq 0, \\ (x-1,5)^2+7,75 > 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x \leq 2, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-3x+10-(2x+4)}{2x+4-1} \geq 0, \\ x^2-3x+10 > 0, \\ 2x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{2x+3} \geq 0, \\ (x-1,5)^2+7,75 > 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x \leq 2, \\ x \geq 3. \end{cases}$$



Ответ: $(-1,5; 2] \cup [3; +\infty)$.

Изложим вторую идею иначе.

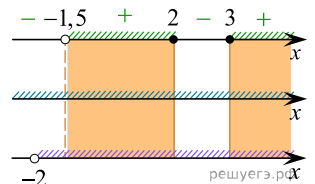
Запишем неравенство $\log_{2x+4}(x^2-3x+10) \geq 1$ в виде

$$\log_{2x+4}(x^2-3x+10) - \log_{2x+4}(2x+4) \geq 0$$

и воспользуемся тем, что знак разности $\log_a b - \log_a c$ на ОДЗ совпадает со знаком дроби $\frac{b-c}{a-1}$. Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{x^2-3x+10-(2x+4)}{2x+4-1} \geq 0, \\ x^2-3x+10 > 0, \\ 2x+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{2x+3} \geq 0, \\ (x-1,5)^2+7,75 > 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x \leq 2, \\ x \geq 3. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{2x+3} \geq 0, \\ (x-1,5)^2+7,75 > 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < x \leq 2, \\ x \geq 3. \end{cases}$$



№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. Пусть x руб. — ежегодный платеж, выплачиваемый банку. Четырьмя равными платежами было выплачено 311040 руб., поэтому $x=311\,040:4=77760$ руб. Проследим за изменением величины долга.

Июль 2018 года: S .

Январь 2019 года: $1,2S$,

Февраль – июнь 2019 года: выплата x

Июль 2019 года: $(1,2S-x)$.

Январь 2020 года: $1,2(1,2S-x)$.

Февраль – июнь 2020 года: выплата x

Июль 2020 года: $1,2(1,2S-x)-x$.

Январь 2021 года: $1,2(1,2(1,2S-x)-x)$.

Февраль – июнь 2021 года: выплата x

Июль 2021 года: $1,2(1,2(1,2S-x)-x)-x$.

Январь 2022 года: $1,2(1,2(1,2(1,2S-x)-x)-x)$.

Февраль – июнь 2022 года: выплата x

Июль 2022 года: $1,2(1,2(1,2(1,2S-x)-x)-x)-x$.

Последняя величина равна нулю, тогда

$$S = \frac{1,2^3 + 1,2^2 + 1,2 + 1}{1,2^4} x = \frac{5,368}{2,0736} \cdot 77760 = 201\,300 \text{ руб.}$$

Ответ: 201300 руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> и использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>3</i>

Решение. а) По теореме об угле между касательной и хордой находим, что $\angle CAK = \angle ABK$. Аналогично $\angle BAK = \angle ACK$. Таким образом,

$$\angle AKC = 180^\circ - \angle CAK - \angle ACK = 180^\circ - \angle ABK - \angle BAK = \angle AKB.$$

Что и требовалось доказать.

б) По условию $\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{1}{\sqrt{15}}$, значит,

$$\cos \angle CAB = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{15}}} = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

тогда $\sin \angle CAB = \frac{1}{4}$. Из подобия треугольников AKC и AKB получаем, что $AK:KC = BK:AK$. Отсюда $AK = 2$, и коэффициент подобия равен 2.

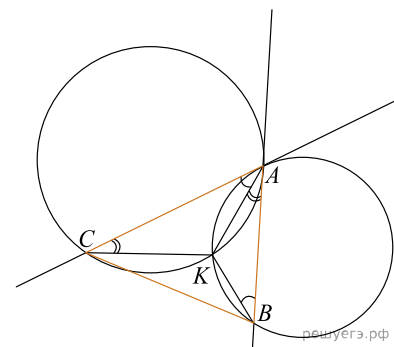
Заметим теперь, что $\angle AKC = 180^\circ - \angle BAC$. Значит, $\cos \angle AKC = -\frac{\sqrt{15}}{4}$. Запишем теорему косинусов для треугольника AKC :

$$AC^2 = 4 + 16 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 20 + 4\sqrt{15} \Leftrightarrow AC = 2\sqrt{5 + \sqrt{15}}.$$

Далее, $AB:AC = 1:2$, тогда $AB = \sqrt{5 + \sqrt{15}}$, откуда находим площадь треугольника ABC :

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \frac{1}{4} = \frac{5 + \sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: $\frac{5 + \sqrt{15}}{4}$.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Для того чтобы данная система имела ровно два решения, уравнение $4^x - 2^{x+1} = a + 3$ (*) должно иметь корни, ровно два из которых удовлетворяют неравенству $\log_2(3-x) \geq a + 4$.

Положим $2^x = t > 0$, $a + 4 = b$. Тогда уравнение (*) принимает вид $(t-1)^2 = b$. Это уравнение имеет два различных положительных корня $t = 1 \pm \sqrt{b}$ при $0 < b < 1$. Таким образом, $2^x = 1 \pm \sqrt{b}$, откуда $x = \log_2(1 \pm \sqrt{b})$. Поскольку $0 < 1 - \sqrt{b} < 1$, а $1 < 1 + \sqrt{b} < 2$, то $\log_2(1 - \sqrt{b}) < 0$, а $0 < \log_2(1 + \sqrt{b}) < 1$.

Неравенство $\log_2(3-x) \geq b$ при $0 < b < 1$ выполнено для всех $x < 1$, поскольку левая часть неравенства больше 1, а правая — меньше 1. Таким образом, система имеет ровно два решения при $0 < b < 1$, откуда $-4 < a < -3$.

Ответ: $-4 < a < -3$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4

Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Модуль разности цифр не больше 9, поэтому записывается одной цифрой. Значит, цифры нового числа поочередно являются цифрами старого числа и результатами вычитаний, причем первая и последняя цифры суть цифры старого числа. Следовательно, новое число записывается нечетным числом цифр. Но число 1234774321 записано десятью цифрами, поэтому не может быть получено в результате такой операции.

б) Да, из числа 454 получается $41514 = 11 \cdot 3774$.

в) Пусть цифры исходного числа равны x, y, z , причем $y \geq x, z$. Тогда новое число имеет цифры $x, y-x, y, y-z, z$. По признаку делимости на 11 числа $x+y+z$ и $y-x+y-z$ должны отличаться на число, кратное 11, то есть число

$$x+y+z-y+x-y+z=2x+2z-y$$

должно быть кратно 11. От перемены мест x и z делимость на 11 не изменится, поэтому будем считать, что $x \geq z$. При этом $2x+2z-y \geq -y > -11$ и

$$2x+2z-y \leq 2x+z \leq 2 \cdot 9+9=27 < 33,$$

поэтому возможны следующие случаи.

1 случай: $2x+2z-y=0$. Ясно, что $y=2x+2z \geq z, x$ и $x+z \leq 4$. Это дает варианты 141, 261, 381, 282 — итого 6 чисел, поскольку в 261 и 381 можно поменять местами крайние цифры.

2 случай: $2x+2z-y=11$. Тогда получаем, что $y=2x+2z-11 \geq x$, откуда $x+2z \geq 11$. Это дает варианты 454, 553, 574, 595, 673, 694, 772, 793, 892, 991 — итого 18 чисел (во всех, кроме 454 и 595, можно поменять местами крайние цифры).

3 случай: $2x+2z-y=22$. Теперь $y=2x+2z-22 \geq x$, откуда $x+2z \geq 22$. Это дает вариант 887 — еще 2 числа.

Итого искоемых чисел $6+18+2=26$.

Ответ: а) нет; б) да; в) 26.