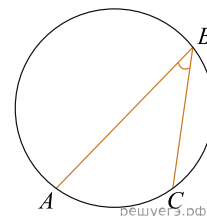


Вариант 155

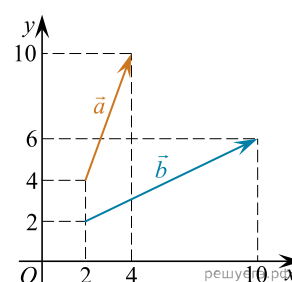
№ 1.

Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет $\frac{1}{5}$ окружности. Ответ дайте в градусах.



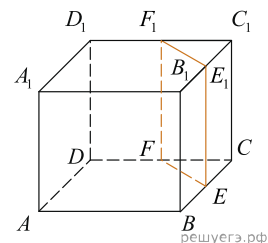
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 2. Найдите объём куба.

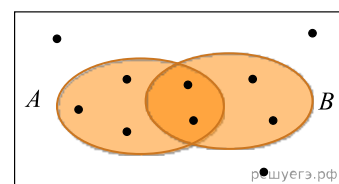


№ 4.

За круглый стол на 17 стульев в случайном порядке рассаживаются 15 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

№ 5.

На диаграмме Эйлера показаны события A и B в некотором случайном эксперименте, в котором 10 равновозможных элементарных событий. Элементарные события показаны точками. Найдите $P(B|A)$ — условную вероятность события B при условии A .



№ 6.

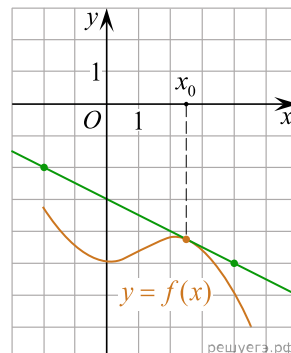
Найдите корень уравнения $\frac{6}{x^2 - 19} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}} \cdot \frac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 9.

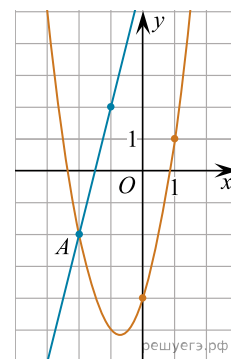
Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку (в Н·м), определяется формулой $M = NIBl^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А — сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м — размер рамки, $N = 1000$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше $0,75$ Н·м?

№ 10.

Два велосипедиста одновременно отправились в 88-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



№ 12.

Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 36x + 36)e^{x-36}$.

№ 13.

а) Решите уравнение $4\sin^2 x = \operatorname{tg} x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащего отрезку $[-\pi; 0]$.

№ 14.

Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM , а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$.

а) Докажите, что $CT > BP$.

б) Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

№ 15.

Решите неравенство $\log_3(x+7) + \frac{1}{6}\log_3(x+1)^6 \geq 2$.

№ 16.

В июле 2028 года планируется взять кредит в банке в размере 5 тысяч рублей на три года. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 70% меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2031 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей по кредиту составила 11502 тысяч рублей. Найдите 5.

№ 17.

Точка I — центр окружности S_1 , вписанной в треугольник ABC , точка O — центр окружности S_2 , описанной около треугольника BIC .

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

б) Найдите косинус угла BAC , если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как 3 : 5.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin|\arctg x| + a \cdot \cos \frac{\arctg x}{2} = \frac{a|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 19.

В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27864	36
2	27736	20
3	324459	16
4	325917	0.125
5	509332	0.4
6	99629	-5
7	26801	0.25
8	510403	-0.5
9	27999	30
10	26584	8
11	642371	2.5
12	26723	10

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

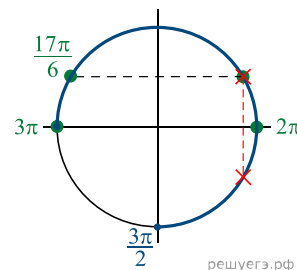
Решение. а) Левая часть уравнения определена при $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, то есть при $x \neq \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Числитель дроби должен быть равен нулю:

$$\begin{aligned}
 2\sin^2 x - \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \\
 2\sin^2 x - \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases}
 \end{aligned}$$

Серию $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ нужно отбросить. Получаем ответ: $x = \pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$: $x = 2\pi, x = \frac{17\pi}{6}, x = 3\pi$.

Ответ: а) $\left\{ \pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $2\pi; \frac{17\pi}{6}; 3\pi$.



№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что в треугольниках TBC и PCB углы B и C равны, сторона BC общая, и $BT < CP$. Тогда, записывая теорему косинусов для сторон CT и BP этих треугольников, получаем искомое неравенство.

б) Проведём высоту AD треугольника ABC . В тоже время AD — высота пирамиды $MPTA$, опущенная из вершины A на плоскость основания MPT .

$$AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

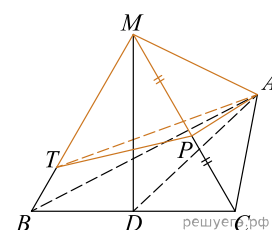
Площадь треугольника MPT составляет $\frac{3}{8}S_{BCM}$. Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{3BC^2\sqrt{3}}{32} = \frac{3 \cdot 64\sqrt{3}}{32} = 6\sqrt{3}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24.$$

Ответ: 24.



Приведём другое решение пункта б).

Знаем, что $V_{MPTA} = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot AD$, где D — середина BC .

Поскольку AD — медиана треугольника ABC , AD — его высота, значит, $AD \perp BC$, кроме того, $AD \perp MD$ (поскольку по условию $(ABC) \perp (MBC)$ и $MD \perp BC$). Таким образом, $AD \perp (MBC)$, то есть является высотой пирамиды $MPTA$. Находим площадь треугольника MPT :

$$S_{MPT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot S_{MBC} = \frac{3}{8} \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

Тогда $AD = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, следовательно,

$$V_{МРТА} = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 24.$$

Приведем решение пункта а) Евгения Железняк.

Пусть точка K — середина MB . Треугольники BKC и BFC равны, поскольку $BK = CF$, BC — общая, $\angle FBC = \angle KCB$, следовательно, $CK = BF$. В правильном треугольнике BMC отрезок CK является медианой, следовательно, и высотой. Тогда CK — перпендикуляр к прямой BM , проведенный из точки C , а CT — наклонная, следовательно, $CK < CT$, тогда $BP < CT$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3(x+7) + \log_3|x+1| \geq 2 \Leftrightarrow \log_3(|x+1| \cdot (x+7)) \geq 2.$$

Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} -7 < x < -1, \\ -(x+1)(x+7) \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 < x < -1, \\ (x+4)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

Рассмотрим второй случай:

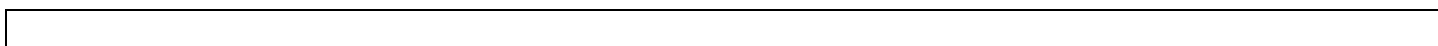
$$\begin{cases} x > -1, \\ (x+1)(x+7) \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x^2 + 8x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -4 + \sqrt{18}.$$

Ответ: $\{-4\} \cup [-4 + 3\sqrt{2}; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Так как в июле 2029 и 2030 годов долг должен быть на 70% меньше долга на июль предыдущего года, то каждый раз сумма долга будет составлять 30% от прошлогоднего значения. Составим график погашения долга:



Год	Сумма долга в начале года, тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Сумма долга в конце года, тыс. руб.
2028			5
2029	1,25	0,2S+0,7S	0,35
2030	$1,2 \cdot 0,3S$	$0,2 \cdot 0,3S + 0,7 \cdot 0,3S$	$0,3 \cdot 0,3S = 0,09S$
2031	$1,2 \cdot 0,09S$	$0,2 \cdot 0,09S + 0,09S$	0

Так как сумма выплат равна 11502 тыс. руб., получаем:

$$0,2S + 0,7S + 0,2 \cdot 0,3S + 0,7 \cdot 0,3S + 0,2 \cdot 0,09S + 0,09S = 11502 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0,9S + 0,06S + 0,21S + 0,018S + 0,09S = 11502 \Leftrightarrow 1,278S = 11502 \Leftrightarrow S = 9000.$$

Ответ: 9 млн руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , получаем, что $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2 , не содержащая точки I , вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC , то есть равна $180^\circ + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна $360^\circ - (180^\circ + \alpha) = 180^\circ - \alpha$. Сумма углов при вершинах A и O четырехугольника $ABOC$ равна 180° , значит, этот четырехугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

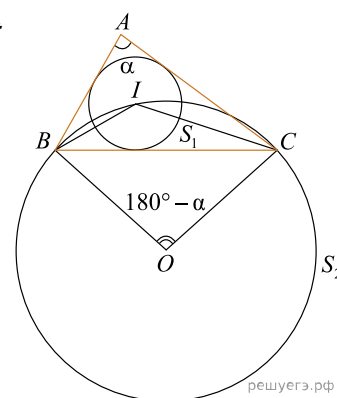
б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов:

$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, R = \frac{BC}{2\sin(90^\circ + \frac{\alpha}{2})} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{3}{5} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{BC}{2\sin\alpha}}{\frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \cdot \frac{25}{36} = -\frac{7}{18}$.



решуегэ.рф

Ответ: $-\frac{7}{18}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что если число x_0 является корнем уравнения, то и число $-x_0$ тоже является корнем этого уравнения. Значит, достаточно рассмотреть только $x \geq 0$, при этом условии уравнение примет вид

$$\sin(\operatorname{arctg} x) + a \cos \frac{\operatorname{arctg} x}{2} = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Пусть $y = \operatorname{arctg} x$, тогда $x = \operatorname{tg} y$, где $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$. Получаем

$$\begin{aligned} \sin y + a \cos \frac{y}{2} &= \frac{a \operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} \Leftrightarrow \sin y + a \cos \frac{y}{2} = \frac{a \sin y \cdot |\cos y|}{\cos y \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}} \Leftrightarrow \sin y + a \cos \frac{y}{2} = a \sin y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} - 2a \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} + a \cdot \cos \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{y}{2} - 2a \sin \frac{y}{2} + a = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{y}{2} = \frac{a}{2(a-1)}. \end{aligned}$$

Полученное тригонометрическое уравнение имеет решение на $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ при

$$\begin{aligned} \sin 0 \leq \frac{a}{2(a-1)} < \sin \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{a}{2(a-1)} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2(a-1)} \geq 0, \\ \frac{a}{a-1} < \sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a > 1, \\ a < 1, \\ a > 2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a > 2 + \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы одно решение при $a \leq 0$ и $a > 2 + \sqrt{2}$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы

Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 8, и при этом

$$\begin{cases} 47 \leq k < l, \\ k+l \leq 110. \end{cases}$$

а) Например, 50 и 60 солдат. Вместе 110, их можно построить в колонну по 10 человек в ряду так, что 5 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 6 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель 13. Тогда, учитывая, что $47 \leq k < 55$, получаем, что $k=52$. Наименьшее возможное значение l равно $52+13=65$, но вместе получается 117 человек, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l , поэтому $l - k \geq 9$; $k - l \leq -9$, что вместе с условием $k+l \leq 110$ приводит к неравенству $2k \leq 101$, то есть $k \leq 50$. При этом $k+d \leq l \leq 110 - k$, где d — наименьший общий делитель, превосходящий 8.

Если $k=47$, то $d=47$, $47+47=94 \leq 110 - 47=63$. Противоречие.

Если $k=48$, то $d=12$, $l=60$, а в роте 108 солдат.

Если $k=49$, то $98 \leq l \leq 110 - 49=61$. Противоречие.

Если $k=50$, то $d=10$, $l=60$, а в роте 110 солдат.

Ответ: а) например, 50 и 60; б) нет; в) 108 и 110.