

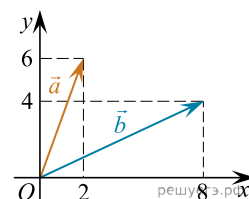
Вариант 156

№ 1.

В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC$, высота AH равна 7, $CH = 24$. Найдите $\sin ACB$.

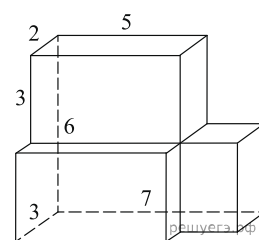
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

В среднем из 1400 садовых насосов, поступивших в продажу, 7 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

№ 5.

Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу, вероятность промаха 0,2, найдите вероятность что он попадет в первую мишень, а в 3 оставшиеся промахнется.

№ 6.

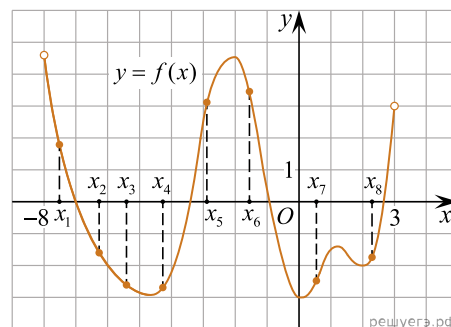
Найдите корень уравнения $16^{x-9} = \frac{1}{2}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\log_3 1,8 + \log_3 5$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. Сколько из отмеченных точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ принадлежат промежуткам убывания функции?



№ 9.

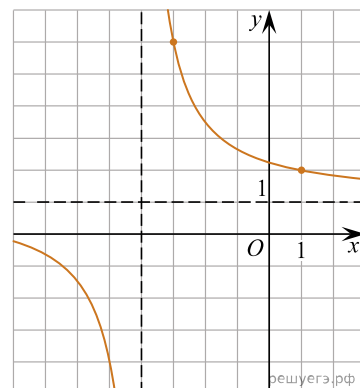
Коэффициент полезного действия (КПД) кормозапарника равен отношению количества теплоты, затраченного на нагревание воды массой m_w (в килограммах) от температуры t_1 до температуры t_2 (в градусах Цельсия) к количеству теплоты, полученному от сжигания дров массы $m_{др}$ кг. Он определяется формулой $\eta = \frac{c_w m_w (t_2 - t_1)}{q_{др} m_{др}} \cdot 100\%$, где $c_w = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·°C) — теплоёмкость воды, $q_{др} = 8,3 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота сгорания дров. Определите наименьшее количество дров, которое понадобится сжечь в кормозапарнике, чтобы нагреть $m_w = 83$ кг воды от 10°C до 100°C , если известно, что КПД кормозапарника не больше 21%. Ответ выразите в килограммах.

№ 10.

Расстояние между городами A и B равно 470 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через 3 часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 60 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 350 км от города A . Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx+a}{x+b}$. Найдите k .



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 3 \operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $[-\frac{\pi}{4}; 0]$.

№ 13.

- Решите уравнение $\cos^3 2x - \sin^3 2x = \cos 2x - \sin 2x$.
- Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; \pi]$.

№ 14.

В правильной четырехугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка K делит боковое ребро AA_1 в отношении $AK : KA_1 = 1 : 2$. Через точки B и K проведена плоскость α , параллельная прямой AC и пересекающая ребро DD_1 в точке M .

- а) Докажите, что плоскость α делит ребро DD_1 в отношении $DM : MD_1 = 2 : 1$.
б) Найдите площадь сечения, если известно, что $AB = 4$, $AA_1 = 6$.
-

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{\sqrt[3]{15}}{\log_{x+1} 11} \geq \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11}$.

№ 16.

Компания решила продать 1000 своих акций. Акционер купил все акции одновременно. Для ускорения продаж каждая десятая акция продается со скидкой $p\%$, а каждая пятнадцатая акция — со скидкой 25%. Если акция подпадает под оба условия, то на неё действует большая скидка ($p < 25$). Найдите p , если каждая акция стоит 5000 рублей, а всего за продажу акций компанией получено 4843800 рублей.

№ 17.

Точка I — центр окружности S_1 , вписанной в треугольник ABC , точка O — центр окружности S_2 , описанной около треугольника BIC .

- а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .
б) Найдите косинус угла BAC , если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как 3 : 5.
-

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x-a|+2|y-1|-4) \cdot (x^2+(y-4)^2-1) \cdot \ln(y-x^2) = 0, \\ (|x-a|+2|y-1|-4) \cdot \left(\frac{|a|}{15} \cdot (x-4) - y + 5\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

№ 19.

Даны натуральные числа 1, 2, 3, ..., 2025. Из этих чисел выбрали несколько так, что для любых двух выбранных чисел a и b , где $a < b$, выполняется неравенство $b - a \neq \text{НОД}(a, b)$.

- а) Может ли количество выбранных чисел равняться 4?
б) Может ли количество выбранных чисел равняться 1200?
в) Какое наибольшее количество чисел может быть выбрано?
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27351	0.28
2	27730	20
3	27212	87
4	283579	0.995
5	630095	0.0064
6	26654	8.75
7	4491	2
8	516374	4
9	27977	18
10	99591	70
11	508993	1
12	26702	5

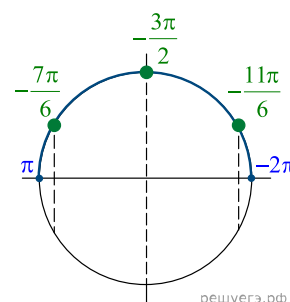
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Применим формулу приведения и формулу косинуса тройного угла, получаем:

$$4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$, отберем при помощи тригонометрической окружности. Подходят числа $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.



решуегэ.рф

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

Примечание.

Можно было не использовать формулу косинуса тройного угла, а разложить уравнение на множители:

$$4\cos^3 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos^2 x = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Пусть четырёхугольник $KBNM$ — сечение данной призмы плоскостью α (см. рис.). Прямая AC параллельна плоскости α , а плоскость ACK пересекает плоскость α по прямой KN , следовательно, $KN \parallel AC$ и, значит, $AKNC$ — прямоугольник. Прямые BD и AC являются соответственно проекциями прямых BM и KN на плоскость ABC , значит, точка пересечения прямых BD и AC (точка H) является проекцией точки пересечения прямых BM и KN (точки O) на эту плоскость. Таким образом, $OH = AK = \frac{1}{3}AA_1$. С другой стороны, отрезок OH — средняя линия треугольника BDM и, следовательно, $DM = 2OH = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}DD_1$, откуда и следует доказываемое утверждение.

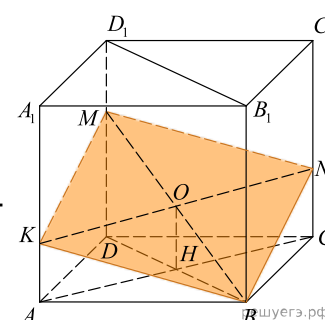
б) Так как $AC \perp BD$ и $AC \perp BB_1$, то $AC \perp (BDD_1)$. Но $KN \parallel AC$, значит, и $KN \perp (BDD_1)$. Следовательно, $KN \perp BM$, поскольку $BM \subset (BDD_1)$ и площадь сечения S равна $S = \frac{BM \cdot KN}{2}$. Имеем:

$$KN = AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2},$$

$$BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{32 + 16} = 4\sqrt{3},$$

$$S = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{6}.$$

Ответ: б) $8\sqrt{6}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Используем формулу $\frac{1}{\log_a b} = \log_b a$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} &\geq \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \sqrt[4]{15} \log_{11}(x+1) \geq \log_{11} 123 \cdot \log_{11}(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \log_{11}(x+1)(\sqrt[4]{15} - \log_{11} 123) \geq 0. \end{cases} \frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} &\geq \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \sqrt[4]{15} \log_{11}(x+1) \geq \log_{11} 123 \cdot \log_{11}(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \log_{11}(x+1)(\sqrt[4]{15} - \log_{11} 123) \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\sqrt[4]{15} < \sqrt[4]{16} = 2 = \log_{11} 121 < \log_{11} 123,$$

а потому $\sqrt[4]{15} - \log_{11} 123 < 0$. Таким образом,

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \log_{11}(x+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ 0 < x+1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Ответ: $(-1; 0)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Определим количество акций, проданных со скидкой. Среди чисел от 1 до 1000 есть 100 чисел, кратных 10. Также среди чисел от 1 до 1000 есть 66 чисел, кратных 15, из которых ровно половина чисел кратна 10, то есть 33 числа. Таким образом, среди чисел от 1 до 1000 есть $100 - 33 = 67$ чисел, кратных только 10, 33 числа, кратных только 15 и 33 числа, кратных и 10, и 15. Получаем, что 67 акций были проданы со скидкой $p\%$, 33 акции были проданы со скидкой 25% и еще 33 акции были также проданы со скидкой 25%, так как по условию акции, попадающие под оба условия, продаются с большей скидкой при условии $p < 25$, что означает, что размер большей скидки составляет 25%. Без скидки были проданы оставшиеся 867 акций.

Выручка от продажи акций, проданных без скидки, составила $867 \cdot 5000 = 4335000$ руб. Выручка от продажи акций, проданных со скидкой 25% составила $33 \cdot 2 \cdot 5000 \cdot 0,75 = 247500$ руб. Выручка от продажи акций, проданных со скидкой $p\%$ составила $67 \cdot 5000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ руб., что равно $4843800 - 4335000 - 247500 = 261300$ руб. Получаем уравнение:

$$67 \cdot 5000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 261300 \Leftrightarrow 335000 \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 261300 \Leftrightarrow 1 - \frac{p}{100} = 0,78 \Leftrightarrow p = 22.$$

Ответ: 22.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с исполь- зованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, при- ведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC , получаем, что $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Дуга BC окружности S_2 , не содержащая точки I , вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC , то есть равна $180^\circ + \alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна $360^\circ - (180^\circ + \alpha) = 180^\circ - \alpha$. Сумма углов при вершинах A и O четырехугольника $ABOC$ равна 180° , значит, этот четырехугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов:

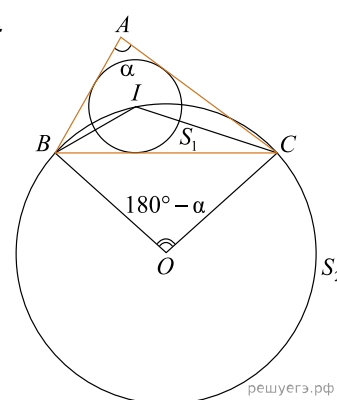
$$r = \frac{BC}{2\sin\alpha}, R = \frac{BC}{2\sin(90^\circ + \frac{\alpha}{2})} = \frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{3}{5} = \frac{r}{R} = \frac{\frac{BC}{2\sin\alpha}}{\frac{BC}{2\cos\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6}$. Следовательно, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \cdot \frac{25}{36} = -\frac{7}{18}$.

Ответ: $-\frac{7}{18}$.



решуегэ.рф

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения. ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2

В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений. ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что если решения уравнения $|x-a|+2|y-1|-4=0$ являются решением исходной системы, то система имеет бесконечное число решений. Значит, чтобы система имела ровно четыре различных решения, решения уравнения $|x-a|+2|y-1|-4=0$ не должны являться решением исходной системы. Это достигается тогда и только тогда, когда решения уравнения $|x-a|+2|y-1|-4=0$ не принадлежат ОДЗ исходной системы, то есть не удовлетворяют условию $y-x^2 > 0$.

Графиком уравнения $|x-a|+2|y-1|-4=0$ в плоскости xOy является ромб с вершинами $(a+4; 1)$, $(a-4; 1)$, $(a; 3)$ и $(a; -1)$, а условию $y-x^2 > 0$ соответствуют все точки лежащие выше параболы $y=x^2$. Таким образом, система будет иметь конечное число решений в двух случаях:

— правая вершина ромба $(a+4; 1)$ принадлежит левой ветви параболы (выделено синим) или лежит левее, что выполняется при

$$a+4 \leq -1 \Leftrightarrow a \leq -5;$$

— левая вершина ромба $(a-4; 1)$ принадлежит правой ветви параболы (выделено оранжевым) или лежит правее, что выполняется при

$$a-4 \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 5.$$

Задача свелась к нахождению таких значений параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x^2 + (y-4)^2 - 1) \cdot \ln(y-x^2) = 0, \\ \frac{|a|}{15} \cdot (x-4) - y + 5 = 0, \\ |a| \geq 5 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Преобразуем первое уравнение полученной системы:

$$\begin{aligned} (x^2 + (y-4)^2 - 1) \cdot \ln(y-x^2) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 1, \\ y-x^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 1, \\ y = x^2 + 1. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 1, \\ y-x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-4)^2 = 1, \\ y = x^2 + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

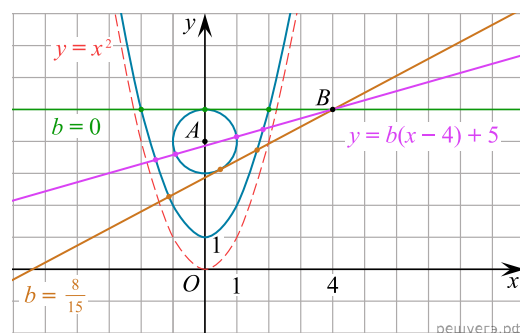
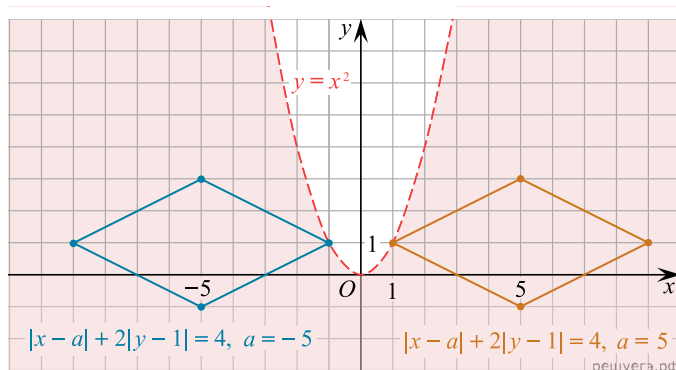
Графиком первого уравнения полученной системы является объединение окружности с центром в точке $A(0; 4)$ радиусом 1 и параболы $y=x^2+1$ (выделены синим).

Пусть $\frac{|a|}{15} = b$. Преобразуем второе уравнение полученной системы:

$$b(x-4) - y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = b(x-4) + 5$$

Графиком второго уравнения полученной системы является пучок прямых, проходящих через точку $B(4; 5)$.

График первого и второго уравнений имеют ровно четыре общие точки тогда и только тогда, когда прямая $y = b(x-4) + 5$ дважды пересекает окружность $x^2 + (y-4)^2 = 1$, то есть когда расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности:



$$\begin{aligned} \frac{|b(0-4)-4+5|}{\sqrt{b^2+1}} < 1 &\Leftrightarrow |1-4b| < \sqrt{b^2+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1-8b+16b^2 < 1+b^2 &\Leftrightarrow 15b^2-8b < 0 \Leftrightarrow 0 < b < \frac{8}{15} \cdot \frac{|b(0-4)-4+5|}{\sqrt{b^2+1}} < 1 \Leftrightarrow |1-4b| < \sqrt{b^2+1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1-8b+16b^2 < 1+b^2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 15b^2-8b < 0 &\Leftrightarrow 0 < b < \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Вернёмся к параметру a :

$$0 < \frac{|a|}{15} < \frac{8}{15} \Leftrightarrow 0 < |a| < 8.$$

Учитывая условие $|a| \geq 5$, получаем:

$$\begin{cases} 0 < |a| < 8, \\ |a| \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq |a| < 8 \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < a \leq -5, \\ 5 \leq a < 8. \end{cases}$$

Ответ: $(-8; -5] \cup [5; 8)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Например, для простых чисел 7, 11, 13, 17 любая разность не меньше двух, а любой НОД равен одному.

б) Нет. Разобьем числа на пары (1,2), (3,4), ..., (2023,2024) и допишем число 2025. Числа из каждой пары имеют разность 1 и НОД, равный одному: если a и $a+1$ кратны d , то и их разность, равная 1, кратна d , поэтому $d=1$. Значит, из каждой пары можно взять не более одного числа. Поэтому всего выбрано не более $\frac{2024}{2} + 1 = 1013$ чисел.

в) В предыдущем пункте было доказано, что выбрать больше 1013 чисел нельзя. Если взять все нечетные числа в этом диапазоне, а их как раз 1013, то получится, что НОД любых двух нечетен, а разность четна, поэтому условие задачи выполнено.

Ответ: а) да; б) нет; в) 1013.