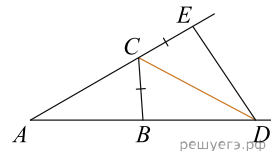


Вариант 157

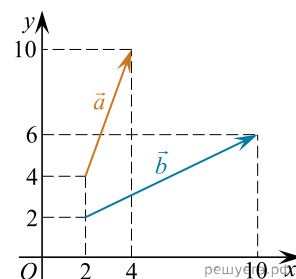
№ 1.

В треугольнике ABC угол A равен 30° , угол B равен 86° , CD — биссектриса внешнего угла при вершине C , причем точка D лежит на прямой AB . На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка E , что $CE = CB$. Найдите угол BDE . Ответ дайте в градусах.



№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точка K — середина ребра AA_1 , точка L — середина ребра A_1D_1 , точка M — середина ребра A_1B_1 . Найдите угол MLK . Ответ дайте в градусах.

№ 4.

В сборнике билетов по биологии всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о грибах. На экзамене школьнику достаётся один случайно выбранный билет из этого сборника. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о грибах.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 6.

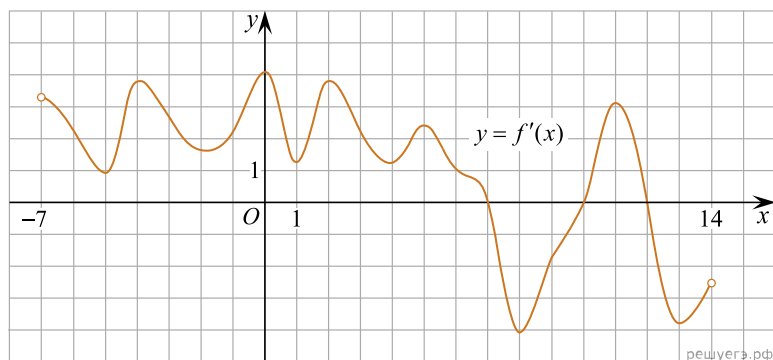
Найдите корень уравнения: $-\frac{2}{9}x = 1\frac{1}{9}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(5^{12})^3 : 5^{37}$.

№ 8.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.



№ 9.

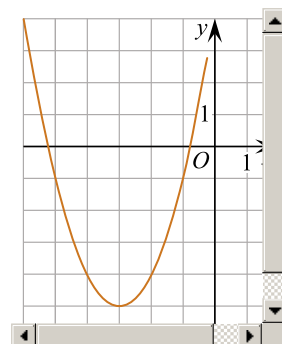
Два тела массой $m=2$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v=10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 50 джоулей?

№ 10.

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10% меди, второй— 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $f(1)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(11x) - 11x + 9$ на отрезке $\left[\frac{1}{22}; \frac{5}{22}\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos 9x - \cos 7x = \sqrt{2} \sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$.

№ 14.

Основанием пирамиды $ABCD$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна 4. Боковое ребро CD перпендикулярно плоскости основания и имеет длину $\sqrt{2}$. Пусть M — середина ребра BC , а N — середина ребра AB .

а) Докажите, что угол между прямыми DM и CN равен 45° .

б) Найдите расстояние между прямыми DM и CN .

№ 15.

Решите неравенство $\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \geq 2$.

№ 16.

Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{3}{4}$ от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

№ 17.

На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 21 : 10$, $BA_1 : A_1C = 2 : 3$, $AB_1 : B_1C = 2 : 5$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Докажите, что четырёхугольник ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Найдите CD , если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 63$, $BC = 25$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$

имеет ровно один корень.

№ 19.

а) Приведите пример 5 различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно 105.

б) Можно ли расставить по кругу 8 различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось 300, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся 1?

в) Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно 60?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27777	56
2	27736	20

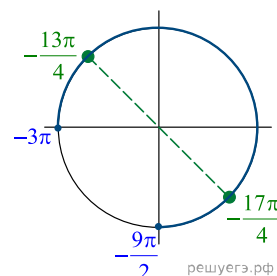
3	315130	60
4	500250	0.92
5	508887	0.8
6	26663	-5
7	77394	0.2
8	27494	1
9	28009	60
10	99576	9
11	508943	11
12	26719	8

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Применим формулу приведения, понизим порядок уравнения, используем формулу косинуса суммы. Получаем:

$$\begin{aligned}
 1 - 4 \cos^2 \left(x - \frac{5\pi}{12} \right) &= \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow 1 - 4 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) = \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \left(1 - 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \right) - 1 &= \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 = \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \left(1 - 2 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \right) - 1 &= \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 &= \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) - 1 &= \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x - 1 = \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) - 1 &= \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x - 1 &= \sqrt{3} \cos 2x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin 2x &= -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Корни, принадлежащие заданному отрезку, отберем при помощи тригонометрической окружности. Получим числа $-\frac{17\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

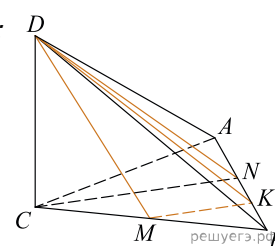
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с исполь- зованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, при- ведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Через точку M проведём отрезок MK параллельно прямой CN . Искомый угол равен углу между прямыми DM и MK . Найдём угол DMK из треугольника DMK . Имеем $CN = 2\sqrt{3}$, а $MK = \sqrt{3}$ как средняя линия тре-
угольника BCN . Далее, имеем:

$$DN = \sqrt{CD^2 + CN^2} = \sqrt{2 + 12} = \sqrt{14},$$

$$DK = \sqrt{DN^2 + NK^2} = \sqrt{14 + 1} = \sqrt{15},$$

$$DM = \sqrt{CD^2 + CM^2} = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6}.$$



По теореме косинусов для треугольника DMK имеем:

$$DK^2 = DM^2 + MK^2 - 2DM \cdot MK \cdot \cos \angle DMK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15 = 6 + 3 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cos \angle DMK \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6 = -6\sqrt{2} \cos \angle DMK \Leftrightarrow \cos \angle DMK = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \angle DMK = 135^\circ.$$

Таким образом, угол между прямыми DM и MK равен 45° .

б) Плоскость DMK содержит прямую DM и параллельна прямой CN (содержит отрезок MK параллельный прямой CN). Таким образом, расстояние между скрещивающимися прямыми DM и CN равно расстоянию от прямой CN до плоскости DMK , которое, в свою очередь, равно расстоянию до плоскости DMK от точки C , то есть высоте h_c пирамиды $DCMK$, опущенной из точки C . Тогда имеем:

$$S_{CMK} = \frac{1}{2} S_{CKB} = \frac{1}{4} S_{CNB} = \frac{1}{8} S_{ABC} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot CN \cdot AB = \frac{2\sqrt{3} \cdot 4}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$V_{DCMK} = \frac{1}{3} \cdot S_{CMK} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

$$S_{DMK} = \frac{1}{2} \cdot DM \cdot MK \cdot \sin \angle DMK = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2},$$

$$h_c = \frac{3V_{DCMK}}{S_{DMK}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек.	1
или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Перейдем к основанию 3 и упростим левую часть неравенства:

$$\log_{3x-3} 3 + \log_{(x-1)^2} 27 \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3(3x-3)} + \frac{3}{\log_3(x-1)^2} \geq 2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3(3(x-1))} + \frac{3}{\log_3(x-1)^2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \log_3(x-1)} + \frac{3}{2\log_3(x-1)} \geq 2.$$

Обозначим $t = \log_3(x-1)$, тогда $\frac{1}{1+t} + \frac{3}{2t} \geq 2$. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{1+t} + \frac{3}{2t} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{5t+3}{2t^2+2t} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{4t^2-t-3}{2t(1+t)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t \leq -\frac{3}{4}, \\ 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} -1 < \log_3(x-1) \leq -\frac{3}{4}, \\ 0 < \log_3(x-1) \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} < x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}, \\ 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}; 1 + \frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right] \cup (2; 4]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть сумма кредита составляет S у.е., а процентная ставка по кредиту $x\%$. К концу первого года сумма долга фермера в банк с учетом начисленных процентов составила $(1+0,01x)S$ у.е.

После возвращения банку $\frac{3}{4}$ части от суммы долга долг фермера на следующий год составил $\frac{1}{4}(1+0,01x)S$ у.е.

На эту сумму в следующем году вновь начислены проценты. Сумма долга фермера к концу второго года погашения кредита с учетом процентной ставки составила $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S$ у.е. По условию задачи эта сумма равна $1,21S$ у.е.

Решим уравнение $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S = 1,21S$ на множестве положительных чисел.

$$(1+0,01x)^2 = 4 \cdot 1,21 \Leftrightarrow 1+0,01x = 2 \cdot 1,1 \Leftrightarrow 0,01x = 1,2 \Leftrightarrow x = 120. \quad (1+0,01x)^2 = 4 \cdot 1,21 \Leftrightarrow 1+0,01x = 2 \cdot 1,1 \Leftrightarrow 0,01x = 1,2 \Leftrightarrow x = 120.$$

Ответ: 120%.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. Проведём через точку B прямую, параллельную прямой AC . Пусть эта прямая пересекает прямую CC_1 в точке T . Тогда треугольники ACC_1 и BTC_1 подобны по двум углам, значит,

$$\frac{BT}{AC} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{10}{21}.$$

Треугольники B_1CD и BTD также подобны по двум углам, следовательно,

$$\frac{BD}{DB_1} = \frac{BT}{CB_1} = \frac{10AC}{21} : \frac{5AC}{7} = \frac{2}{3} = \frac{BA_1}{A_1C}.$$

Таким образом, прямая A_1D параллельна прямой AC . Значит, треугольники DBA_1 и B_1BC подобны, следовательно,

$$DA_1 = \frac{BA_1}{BC} \cdot B_1C = \frac{2}{5} \cdot \frac{5AB_1}{2} = AB_1.$$

Значит, в четырёхугольнике ADA_1B_1 противоположные стороны равны и параллельны, следовательно, он является параллелограммом.

б) Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке H , тогда

$$A_1H = \frac{AB_1}{B_1C} \cdot A_1C = 6.$$

В прямоугольном треугольнике DHA_1 :

$$A_1D = AB_1 = \frac{2AC}{7} = 18;$$

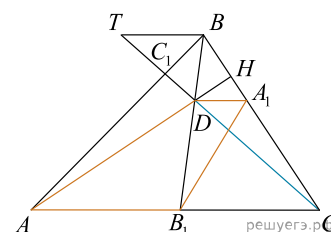
$$DH^2 = A_1D^2 - A_1H^2 = 288.$$

В прямоугольном треугольнике CDH :

$$HC = A_1H + A_1C = 21;$$

$$CD = \sqrt{DH^2 + HC^2} = 27.$$

Ответ: б) 27.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4

С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть $x^2+x+1=t$, $2a^2=b$, тогда

$$(t+b)^2=4bt \Leftrightarrow t^2+2bt+b^2=4bt \Leftrightarrow t^2-2bt+b^2=0 \Leftrightarrow (t-b)^2=0 \Leftrightarrow t=b. (t+b)^2=4bt \Leftrightarrow t^2+2bt+b^2=4bt \Leftrightarrow t^2-2bt+b^2=0 \Leftrightarrow (t-b)^2=0 \Leftrightarrow t=b.$$

Вернёмся к исходным переменным:

$$x^2+x+1=2a^2 \Leftrightarrow x^2+x+1-2a^2=0.$$

Полученное уравнение является квадратным при любом значении параметра a , значит, оно имеет ровно один корень тогда и только тогда, когда его дискриминант

$$D=1-4 \cdot 1 \cdot (1-2a^2)=8a^2-3$$

равен нулю. Получаем:

$$8a^2-3=0 \Leftrightarrow a^2=\frac{3}{8} \Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{3}{8}} \Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{\sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right\}.$

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) 105; 3; 35; 21; 5.

б) Нет. Каждое число в круге должно являться делителем числа 300. Поскольку $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, делителей всего $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, включая 1 и 300. Наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел должно равняться 300, поэтому рядом с числом 1 может стоять только 300 и число 1 не может находиться в круге. Среди делителей числа 300 есть 6 делителей, кратных 2 и не кратных 4, 6 делителей, кратных 5 и не кратных 25, и 2 делителя, кратных 10 и не кратных 4 и 25. Поэтому 10 чисел среди делителей числа 300 кратны 2 или 5 и не кратны их квадратам. Среди 8 чисел, выписанных в круг, не будет числа 1, поэтому там будет хотя бы одно число, кратное 2 или 5 и не кратное их квадратам. Рядом с таким числом с обеих сторон будут стоять числа, кратные тому же простому числу (2 или 5), поэтому наибольший общий делитель этих трёх подряд идущих чисел будет больше 1.

в) Каждое число, выписанное в круг, обязано быть делителем числа 60. У числа $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ всего 12 делителей, считая 60 и 1. Среди этих делителей есть простое число 2, на квадрат которого делится 60. Рядом с числом 2 может стоять только число 60, чтобы их наименьшее общее кратное равнялось 60 (число, стоящее рядом с 2, должно делиться и на 4, и на 3, и на 5), поэтому число 2 не может быть написано. Рядом с числами 5 и 10 могут быть написаны только числа 12 и 60, поэтому если в круге больше 4 чисел, то 5 и 10 не могут одновременно находиться в круге. Аналогично 3 и 6 не могут быть написаны одновременно, поскольку рядом с ними могут быть написаны только числа 20 и 60. Значит, всего может быть выписано в круг не более 8 чисел. Пример чисел 60; 6; 20; 30; 4; 15; 12; 10 показывает, что наибольшее искомое количество чисел равно 8.

Ответ: а) например, 105; 3; 35; 21; 5; б) нет; в) 8.
