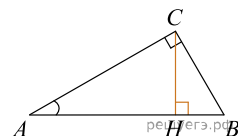


Вариант 158

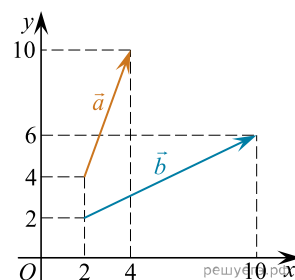
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 8$, $BH = 4$.
Найдите $\sin A$.



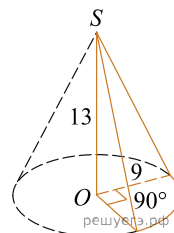
№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Найдите объем V части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



№ 4.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 25 спортсменов, среди них 8 прыгунов из России и 9 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что шестым будет выступать прыгун из Парагвая.

№ 5.

Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу, вероятность промаха 0,2, найдите вероятность что он попадёт в первую мишень, а в 3 оставшиеся промахнется.

№ 6.

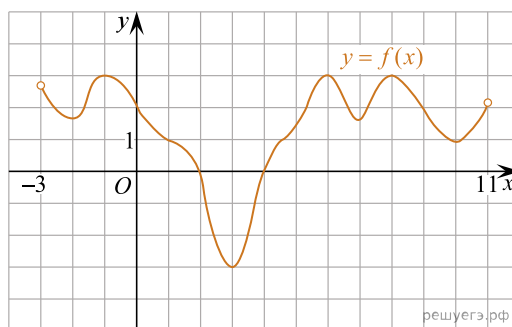
Найдите корень уравнения $\frac{6}{x^2-19}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

№ 7.

Найдите значение выражения $(4a)^3 : a^7 \cdot a^4$.

№ 8.

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-3;11)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[4;9]$.



№ 9.

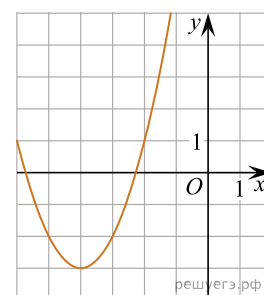
Катер должен пересечь реку шириной $L=100$ м и со скоростью течения $u=0,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

№ 10.

От пристани A к пристани B , расстояние между которыми равно 420 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 час после этого следом за ним, со скоростью на 1 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — целые. Найдите a .



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 13x + 9 \ln x + 8$ на отрезке $\left[\frac{13}{14}; \frac{15}{14}\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $2 \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3} \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№ 14.

В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 12$ и $BC = 5\sqrt{3}$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = 5$, $SB = 13$, $SD = 10$.

- Докажите, что SA — высота пирамиды.
- Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

№ 15.

Решите неравенство $30 \cdot 3^{\log_2(7-x)} + 3^{1+\log_2 x} - 3^{\log_2(7x-x^2)} \geq 90$.

№ 16.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок. Условия возврата таковы:

- в январь n -го года после взятия кредита долг возрастает на $5(n-1)\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный и максимальный срок следует взять кредит, чтобы наибольший годовой платеж по кредиту не превысил 3 млн рублей?

№ 17.

Дана трапеция с диагоналями равными 8 и 15. Сумма оснований равна 17.

- Докажите, что диагонали перпендикулярны.
- Найдите площадь трапеции.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{5}{x} - 4 \right| = ax - 1$ на промежутке $(0, +\infty)$ имеет более двух корней.

№ 19.

Между цифрами двузначного натурального числа n вставляют ещё одну цифру так, чтобы полученное трехзначное число m делилось на n . Число n не может начинаться с нуля.

- Может ли быть $m = 8n$?
- Чему равно наименьшее возможное значение $\frac{m}{n}$?
- Чему равно наибольшее возможное значение $\frac{m}{n}$?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27336	0.5
2	27737	200
3	27202	87.75
4	285928	0.36.

5	630095	0.0064
6	99629	-5
7	26816	64
8	672746	3
9	28010	45
10	26590	20
11	564646	61
12	26720	-3

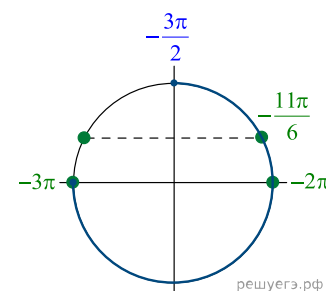
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 - 2 \sin^2 x = \sqrt{3} \cos x + 1 \Leftrightarrow \sin x - 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. Пусть кредит взят на k лет. Внесем в таблицу данные согласно условию.

Номер года	Долг в январе, после начисления процентов, млн руб.	Выплата, млн руб.	Долг в июле, млн руб.
$n-1$	...	...	$\frac{10(k-n+1)}{k}$
n	$\left(1 + \frac{5(n-1)}{100}\right) \cdot \frac{10(k-n+1)}{k}$	$f(n)$	$\frac{10(k-n)}{k}$

Выплата в n -й год равна

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \left(1 + \frac{5(n-1)}{100}\right) \cdot \frac{10(k-n+1)}{k} - \frac{10(k-n)}{k} = \\
 &= \frac{10}{k} + \frac{5(n-1)}{100} \left(10 - \frac{10(n-1)}{k}\right) = -\frac{1}{2k} \cdot (n-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (n-1) + \frac{10}{k} = \frac{10}{k} + \frac{5(n-1)}{100} \left(10 - \frac{10(n-1)}{k}\right) = \\
 &= -\frac{1}{2k} \cdot (n-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot (n-1) + \frac{10}{k}.
 \end{aligned}$$

Рассматривая последнее выражение как квадратичную функцию $f(n)$ с отрицательным старшим коэффициентом, заключаем, что она достигает наибольшего значения в точке

$$n-1 = -\frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2k}\right)} = \frac{k}{2},$$

и оно равно

$$\max_{\mathbb{R}} f(n) = -\frac{1}{2k} \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{2} + \frac{10}{k} = \frac{k}{8} + \frac{10}{k}.$$

Наибольший годовой платеж по кредиту не должен превышать 3 млн рублей, тогда

$$\frac{k}{8} + \frac{10}{k} \leq 3 \Leftrightarrow k^2 - 24k + 80 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq k \leq 20.$$

Значит, минимальный срок кредита — 4 года, а максимальный — 20 лет.

Ответ: 4 года и 20 лет.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

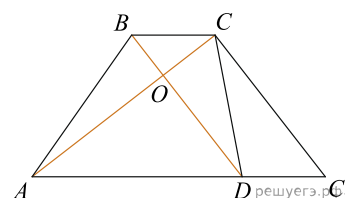
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Проведем через точку C прямую параллельную BD . На пересечении этой прямой и прямой AD отметим точку C_1 , BCC_1D — параллелограмм.

В треугольнике ACC_1 : $AC = 15$, $CC_1 = BD = 8$, $AC_1 = AD + DC_1 = 17$.

Заметим, что $AC^2 + CC_1^2 = AC_1^2$, поскольку $289 = 225 + 64$, тогда по теореме обратной теореме Пифагора, треугольник ACC_1 прямоугольный, угол ACC_1 прямой. Тогда угол COD прямой, что и требовалось доказать.

$$б) S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 15 = 60.$$



Ответ: б) 60.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Отметим, что при $a \leq 0$ уравнение не имеет положительных корней, поскольку его левая часть неотрицательна, а правая отрицательна. Определим, для каких положительных a графики функций $y = \left| \frac{5}{x} - 4 \right|$ и $y = ax - 1$ имеют более двух точек пересечения на области $x > 0$.

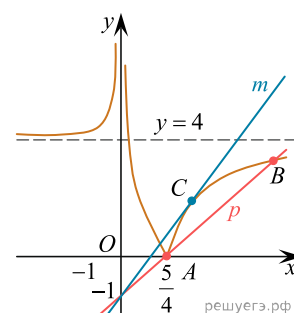
Уравнение $y = ax - 1$ задаёт семейство прямых, проходящих через точку $(0; -1)$. Если их угловой коэффициент меньше чем у прямой p или больше чем у прямой m (см. рис.), то на промежутке $(0; +\infty)$ графики будут иметь ровно одну общую точку. Если прямая совпадает с прямой p или с прямой m , то графики будут иметь ровно две общие точки. Графики имеют три общие точки, а исходное уравнение имеет три положительных решения, если прямые $y = ax - 1$ лежат внутри острого угла, образованного прямыми p и m .

Найдём граничные значения параметров, соответствующие этим прямым.

Для прямой p :

$$y\left(\frac{5}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \frac{5}{4} - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}.$$

Найдём значение параметра, соответствующее касанию. Имеем:



$$4 - \frac{5}{x} = ax - 1 \Leftrightarrow 4x - 5 = ax^2 - x \Leftrightarrow ax^2 - 5x + 5 = 0.$$

Касательная к гиперболе имеет с ней единственную общую точку, поэтому дискриминант полученного квадратного уравнения должен быть равен нулю:

$$25 - 4 \cdot a \cdot 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}.$$

Итак, касанию соответствует значение параметра $a = \frac{5}{4}$.

При найденных значениях параметров прямая p пересекается с графиком функции $y = \left| \frac{5}{x} - 4 \right|$ в точках $A\left(\frac{5}{4}; 0\right)$ и $B(5; 3)$, а прямая m касается графика в точке $C\left(2; \frac{3}{2}\right)$. Заметим, что точка C действительно лежит левее точки B в силу того, что график выпукл вверх и что ордината точки C положительна, иначе оказалось бы, что наш рисунок неверен и потребовалось рассмотреть соответствующую конфигурацию.

Таким образом, искомыми значениями параметра являются $\frac{4}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{4}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Приведём авторское решение.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - 1$ и $g(x) = \left| \frac{5}{x} - 4 \right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(0, +\infty)$.

При $a \leq 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0, +\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0, +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0, \frac{5}{4}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0, \frac{5}{4}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{5}{4}\right) \geq g\left(\frac{5}{4}\right)$, откуда получаем $a \cdot \frac{5}{4} - 1 \geq 0$, то есть $a \geq \frac{4}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - 1 = 4 - \frac{5}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - 5x + 5 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней, при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2, при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{5 + \sqrt{D}}{2a} > \frac{5}{2a} > 2 > \frac{5}{4}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{4}, +\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1 - \frac{5}{4}\right)\left(x_2 - \frac{5}{4}\right) = a \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 5 = \frac{25a - 20}{16} > 0, \text{ то есть } a > \frac{4}{5}.$$

Таким образом, исходное уравнение $\left| \frac{5}{x} - 4 \right| = ax - 1$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0, +\infty)$:

- нет корней при $a \leq 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{4}{5}$ и $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{4}{5}$ и $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{4}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{4}{5} < a < \frac{5}{4}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Пусть число состояло из цифр a и c , а вставили в него цифру b . Тогда $n = 10a + c$, $m = 100a + 10b + c$. Пусть также $\frac{m}{n} = x$.

а) Если $x = 8$, то

$$100a + 10b + c = 8(10a + c),$$

откуда $20a + 10b = 7c$. Значит, c кратно 10 и потому $c=0$. Но тогда $20a + 10b = 0$, откуда $a = b = 0$, что невозможно.

б) При $n = 18$ и $m = 108$ получаем, что $x = 6$. Допустим, $x \leq 5$. Тогда

$$100a + 10b + c \leq 5(10a + c),$$

откуда $50a + 10b \leq 4c$. Но

$$50a + 10b \geq 50 \cdot 1 > 4 \cdot 9 \geq 4c.$$

Противоречие.

в) При $n = 10$ и $m = 190$ получаем, что $x = 19$. Допустим, $x \geq 20$. Тогда

$$100a + 10b + c \geq 20(10a + c),$$

откуда $10b \geq 100a + 19c$. Но

$$10b \leq 90 < 100 \leq 100a + 19c.$$

Противоречие.

Ответ: а) нет; б) 6; в) 19.
