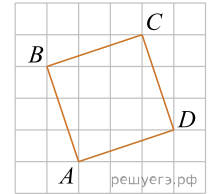


Вариант 160

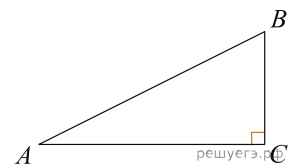
№ 1.

Найдите радиус r окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$. Считайте, что стороны квадратных клеток равны 1. В ответе укажите $r\sqrt{10}$.



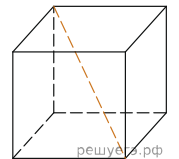
№ 2.

В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен $\sqrt{3}$. Найдите скалярное произведение $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



№ 3.

Объем куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.

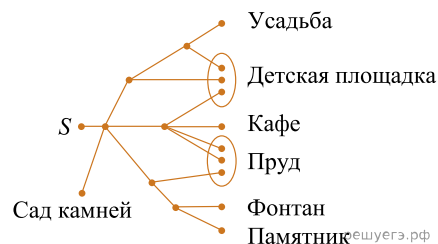


№ 4.

На конференцию приехали 3 ученых из Норвегии, 3 из России и 4 из Испании. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьевкой. Найдите вероятность того, что восьмым окажется доклад ученого из России.

№ 5.

Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



№ 6.

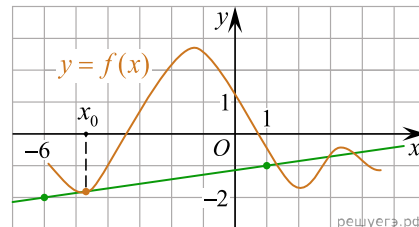
Найдите корень уравнения $7^{18,5x+0,7} = \frac{1}{343}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $36^{\log_6 5}$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведенная в точке x_0 . Найдите значение производной функции $g(x) = 9f(x) - \frac{2}{7}x + 7$ в точке x_0 .



№ 9.

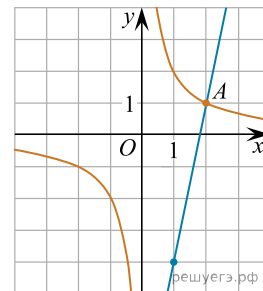
Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите месячный объем производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300 000 руб.

№ 10.

Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон — 42000 рублей, Гоша — 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

№ 11.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 7 \sin x - 8x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $2 \log_3^2(2 \cos x) - 5 \log_3(2 \cos x) + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 14.

Высота цилиндра равна 3, а радиус основания равен 13.

а) Постройте сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра, так, чтобы площадь этого сечения равнялась 72.

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра.

№ 15.

Решите неравенство: $5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0$.

№ 16.

1 апреля 2019г. Андрей Петрович положил 10 000 рублей на банковский вклад сроком на 1 год с ежемесячным начислением процентов и капитализацией под 21% годовых. Это означает, что первого числа каждого месяца сумма вклада увеличивается на одно и то же количество процентов, рассчитанное таким образом, что за 12 месяцев она увеличится ровно на 21%. Через сколько месяцев сумма вклада впервые превысит 11 000 рублей?

№ 17.

Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $a + 2x + 5\sqrt{2x+1} > -(2ax+3)$ верно для всех x из отрезка $[0; 1,5]$.

№ 19.

Над парой целых чисел $(a; b)$ проводится операция, после которой получается пара $(3a+b; 3b-a)$.

а) Возможно ли из какой-то пары получить пару $(5; 5)$?

б) Верно ли, что если пара $(c; d)$ может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции, то и пара $(-d; c)$ тоже может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции?

в) Зададим расстояние между парами целых чисел $(a; b)$ и $(c; d)$ выражением $|a-c| + |b-d|$. Найдите наименьшее расстояние от пары $(9; 2)$ до пары, полученной из какой-то пары с помощью данной операции.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27952	5
2	654449	3
3	27056	24
4	285924	0,3

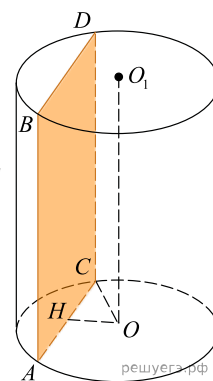
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть OO_1 — ось цилиндра. Проведем AB и CD параллельно оси цилиндра. Проведем BD и AC . Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость, поэтому прямоугольник $BDCA$ — искомое сечение (см. рис.). Расстояние от плоскости сечения до центра основания цилиндра, при котором площадь сечения равна 72, найдено в пункте б).

б) В этом прямоугольнике одна сторона будет равняться высоте цилиндра, а вторая — хорде окружности, лежащей в основании. $S = 3 \cdot x = 72$, поэтому $x = 24$, где x — хорда AC . Проведем OH перпендикулярно AC . В силу того, что треугольник ACO равнобедренный, точка H также будет являться серединой AC . Тогда из прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза — радиус OC , а один катет — половина этой хорды, находим второй катет OH по теореме Пифагора.

$$OH = \sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$$

Таким образом, расстояние от центра окружности до сечения равно 5.



Ответ: б) 5.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Используя основное логарифмическое тождество, получим:

$$\begin{aligned}
 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \\
 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. \quad 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125. 5^{\log_5(\log_5 x)} + \log_{0,2}^2 x - 12 \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x + \log_5^2 x - 12 \leq 0, \\ \log_5 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5^2 x + \log_5 x - 12 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 3)(\log_5 x + 4) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq \log_5 x \leq 3, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{625} \leq x \leq 125, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 125.
\end{aligned}$$

Ответ: $(1; 125]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть каждый месяц сумма вклада увеличивается на k процентов, а $K = 1 + \frac{k}{100}$. Тогда через двенадцать месяцев сумма вклада будет равна $10000 \cdot K^{12}$. Справедливо равенство

$$10000 \cdot K^{12} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{21}{100}\right),$$

откуда $K^{12} = 1,21$.

Требуется найти наименьшее целое n , при котором будет выполнено неравенство

$$10000 \cdot K^n > 11000.$$

Имеем:

$$K^n > 1,1 \Leftrightarrow K^n > \sqrt{1,21} \Leftrightarrow K^n > \sqrt{K^{12}} \Leftrightarrow K^n > K^6 \Leftrightarrow_{K>1} n > 6.$$

Наименьшим целым решением полученного неравенства является $n = 7$.

Ответ: 7.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a ИЛИ установлено, что исходное уравнение при всех значениях a имеет единственное решение.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Запишем уравнение в виде

$$5\sqrt{2x+1} > -2x(a+1) - 3 - a.$$

В левой части уравнения возрастающая выпуклая вверх функция, на концах заданного отрезка она проходит через точки $(0; 5)$ и $(1,5; 10)$. В правой части — линейная функция с отрицательным угловым коэффициентом. Для того, чтобы на отрезке $[0; 1,5]$ прямая лежала ниже графика корня, значение линейной функции при $x=0$ должно быть меньше 5, а при $x = 1,5$ должно быть меньше 10. Решая систему неравенств $-3 - a < 5$, $-3(a+1) - 3 - a < 10$, находим, что $a > -4$.

Ответ: $a > -4$.

Приведем другое решение.

Сделаем замену $\sqrt{2x+1} = t$, тогда $2x = t^2 - 1$. Имеем:

$$a + t^2 - 1 + 5t + a(t^2 - 1) + 3 > 0 \Leftrightarrow (a+1)t^2 + 5t + 2 > 0. \quad (*)$$

Причем значениям x из отрезка $[0; 1,5]$ соответствуют t , лежащие в отрезке $[1; 2]$.

При $a \geq -1$ неравенство $(*)$ верно, поскольку на отрезке $[1; 2]$ первое слагаемое в левой части неотрицательно, а другие положительны. Если $a < -1$, то старший коэффициент квадратичной функции $f(t) = (a+1)t^2 + 5t + 2$ отрицателен, а потому для того, чтобы функция f была положительной на $[1; 2]$ необходимо и достаточно одновременного выполнения неравенств $f(1) > 0$, и $f(2) > 0$. Тогда $(a+1) + 7 > 0$ и $4(a+1) + 12 > 0$, то есть $a > -4$. Учитывая условие $a < -1$, находим: $-4 < a < -1$. Объединяя со случаем $a \geq -1$, окончательно получаем: $a > -4$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Система уравнений $3a + b = 5$, $3b - a = 5$ имеет решение $a = 1$, $b = 2$, поэтому $(1; 2) \mapsto (5; 5)$.

б) Пусть $3a + b = c$ и $3b - a = d$. Тогда $3(-b) + a = -d$ и $3a - (-b) = c$, то есть $(-b; a) \mapsto (-d, c)$. Значит, утверждение верно.

в) Найдем наименьшее значение выражения $|3a + b - 9| + |3b - a - 2|$. При $a = b = 2$ его значение 3. Докажем, что получить меньше нельзя. В самом деле, пусть это возможно. Оба слагаемых — целые неотрицательные числа, значит, каждое из них не превосходит двух. То есть $7 \leq 3a + b \leq 11$ и $0 \leq 3b - a \leq 4$. Домножая второе неравенство на 3 и складывая, получим $7 \leq 10b \leq 23$, откуда $b = 1$ или $b = 2$.

При $b = 1$ получаем: $6 \leq 3a \leq 10$ и $-1 \leq a \leq 3$, поэтому следует проверить $a = 2$ и $a = 3$.

При $b = 2$ получаем: $5 \leq 3a \leq 9$ и $2 \leq a \leq 6$, поэтому следует проверить $a = 2$ и $a = 3$.

Итак, требуют проверки пары $(2, 1) \mapsto (7, 1)$, $(3, 1) \mapsto (10, 0)$, $(2, 2) \mapsto (8, 4)$ и $(3, 2) \mapsto (11, 3)$. Все они дают результат не лучше.

Ответ: а) да; б) да; в) 3.