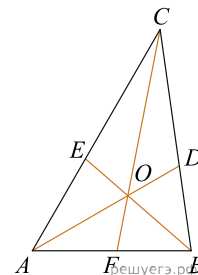


Вариант 161

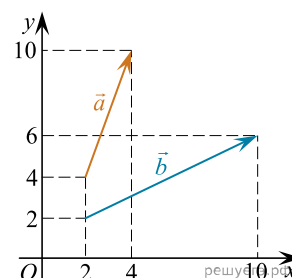
No 1.

В треугольнике ABC угол A равен 60° , угол B равен 82° . AD , BE и CF — биссектрисы, пересекающиеся в точке O . Найдите угол AOF . Ответ дайте в градусах.



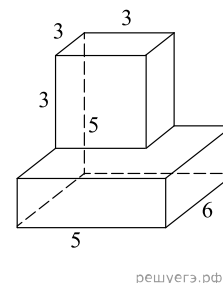
No 2.

Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



No 3.

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

При производстве в среднем на каждые 2982 исправных насоса приходится 18 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

№ 5.

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,93. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

No 6.

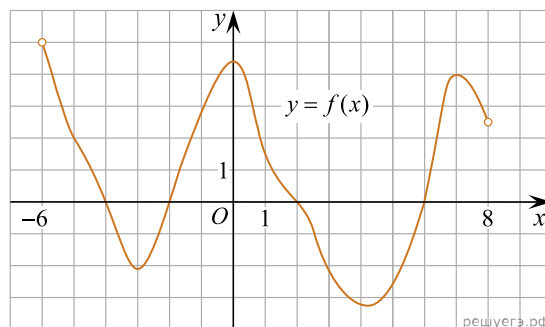
Найдите корень уравнения $\sqrt{57-7x}=6$.

№ 7.

Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 4}$.

№ 8.

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 8)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



№ 9.

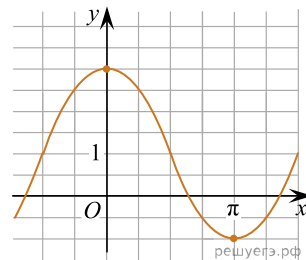
Груз массой 0,08 кг колеблется на пружине. Его скорость u меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, u — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 1 секунду после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

№ 10.

Баржа в 10:00 вышла из пункта A в пункт B , расположенный в 15 км от A . Пробыв в пункте B 1 час 20 минут, баржа отправилась назад и вернулась в пункт A в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \cos x + b$, где a и b — целые числа. Найдите $y\left(\frac{13\pi}{3}\right)$.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = (x + 16)e^{16-x}$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\log_7(x + 2) = \log_{49}(x^4)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_6 \frac{1}{7}; \log_6 35\right]$.

№ 14.

В правильной треугольной пирамиде $MNPQ$ с вершиной M сторона основания равна 15, высота равна $\sqrt{6}$. На ребрах NP , NQ и NM отмечены точки E , F , K соответственно, причем $NE = NF = 3$ и $NK = \frac{9}{5}$.

- Докажите, что плоскости EFK и MPQ параллельны.
- Найдите расстояние от точки K до плоскости MPQ .

№ 15.

Решите неравенство $\frac{(x^2 + 5x + 4)(x + 1)}{x^2 + 6x + 8} + \frac{(x^2 + 4x + 3)(x + 1)}{x^2 + 5x + 6} \leq (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 1)$.

№ 16.

В июле 2021 года планируется взять кредит на сумму 21 млн рублей на 7 лет (последняя выплата запланирована в 2028 году). Условия его возврата таковы:

- пока долг больше половины, каждый январь он возрастает на $p\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
 - если долг не превышает половины исходной суммы, то каждый январь долг возрастает на 6% по сравнению с концом предыдущего года;
 - с февраля по июнь надо выплатить часть долга;
 - в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.
- Найдите p , если общая сумма выплат составит 24,72 млн рублей.

№ 17.

Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
- Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.

№ 18.

Найдите все значения a , при которых уравнение

$$((a-2)x^2 + 6x)^2 - 4((a-2)x^2 + 6x) + 4 - a^2 = 0$$

имеет ровно два решения.

№ 19.

В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний — 2076.

- может ли в последовательности быть три члена?
- может ли в последовательности быть четыре члена?
- может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
-------	---------	-------

1	27778	49
2	27740	40
3	513422	87
4	282856	0,006
5	689089	0,06
6	526005	3
7	26844	28
8	27487	4
9	28013	0,01
10	26610	2
11	676854	2
12	26713	-15

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Поскольку $\log_{7^2} x^4 = \log_7 x^2$, получаем:

$$\log_7(x+2) = \log_{49} x^4 \Leftrightarrow \log_7(x+2) = \log_7 x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0, \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases} \log_7(x+2) = \log_{49} x^4 \Leftrightarrow \log_7(x+2) = \log_7 x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 0, \\ x+2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 2. \end{cases}$$

б) В силу цепочки соотношений $\log_6 \frac{1}{7} < \log_6 \frac{1}{6} = -1 < \log_6 35 < \log_6 36 = 2$ заданному отрезку принадлежит только число -1 .

Ответ: а) $\{-1, 2\}$; б) -1 .

№ 14.

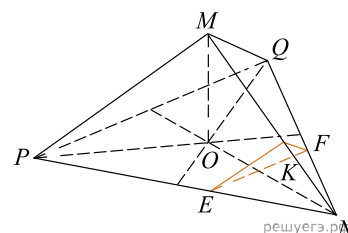
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что прямые EF и PQ параллельны. Вычислим боковое ребро пирамиды:

$$NO = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 15 = 5\sqrt{3}, \quad MN = \sqrt{NO^2 + OM^2} = 9,$$

где O — центр основания. Заметим, что $\frac{EN}{PN} = \frac{1}{5} = \frac{NK}{MN}$, следовательно, прямые EK и PM параллельны. Таким образом, плоскости EFK и MPQ содержат две пары пересекающихся параллельных прямых и, следовательно, параллельны.



б) Расстояние от точки K до плоскости MPQ равно расстоянию между параллельными плоскостями MPQ и EFK , которое может быть вычислено как разность расстояний до этих плоскостей от точки N :

$$S_{PQN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot PQ^2 = \frac{225\sqrt{3}}{4}, \quad S_{MPQ} = \sqrt{\frac{33}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2}} = \frac{45}{4}\sqrt{11}, \quad S_{PQN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot PQ^2 = \frac{225\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{MPQ} = \sqrt{\frac{33}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{15}{2}} = \frac{45}{4}\sqrt{11},$$

$$d(N, MPQ) = \frac{S_{PQN} \cdot MO}{S_{MPQ}} = \frac{15\sqrt{22}}{11}.$$

Пирамида $KEFN$ подобна пирамиде $MNPQ$ с коэффициентом $k = \frac{1}{5}$, следовательно,

$$d(N, EFK) = \frac{1}{5}d(N, MPQ), \quad d(K, MPQ) = \frac{4}{5}d(N, MPQ) = \frac{12\sqrt{22}}{11}, \quad d(N, EFK) = \frac{1}{5}d(N, MPQ),$$

$$d(K, MPQ) = \frac{4}{5}d(N, MPQ) = \frac{12\sqrt{22}}{11}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{22}}{11}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\frac{(x+1)(x+4)(x+1)}{(x+2)(x+4)} + \frac{(x+1)(x+3)(x+1)}{(x+2)(x+3)} \leq (x^2+1)(x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{(x+2)} + \frac{(x+1)^2}{(x+2)} \leq (x^2+1)(x+1)^2, \\ x \neq -4, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \left(x^2+1-\frac{2}{x+2} \right) \geq 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x+1)^2(x^2+2x+1)}{x+2} \geq 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 \left(x^2+1-\frac{2}{x+2} \right) \geq 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x+1)^2(x^2+2x+1)}{x+2} \geq 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x+1)^4}{x+2} \geq 0, \\ x \neq -4, \\ x \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4, \\ -4 < x < -3, \\ -3 < x < -2, \\ x = -1, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-4; -3) \cup (-3; -2) \cup \{-1\} \cup [0; \infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть первый повышающий коэффициент равен $a = 1 + \frac{p}{100}$, а второй повышающий коэффициент равен $b = 1 + \frac{6}{100}$. В июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года, эта сумма равна $\frac{21}{7} = 3$ млн руб. Составим таблицу.

Год	Долг в январе (после начисления процен- тов) млн руб.	Выплата млн руб.	Долг в июле (до начисления процен- тов) млн руб.
2021			21
2022	$21a$	$21a - 18$	18
2023	$18a$	$18a - 15$	15
2024	$15a$	$15a - 12$	12
2025	$12a$	$12a - 9$	9

Уравнение $(a-2)x^2+6x=a+2$ и $(a-2)x^2+6x=2-a$ совпадают при $a+2=2-a$, то есть при $a=0$. В этом случае мы по-

лучаем единственное уравнение $-2x^2 + 6x = 2$, которое имеет два решения.

При других значениях a исходное уравнения имеет ровно два решения, если либо оба уравнения $(a-2)x^2 + 6x = a+2$ и $(a-2)x^2 + 6x = 2-a$ имеют по одному решению, либо одно из них не имеет решений, а другое имеет два решения. При $a = 2$ каждое из этих уравнений имеет единственное решение и эти решения различны. При других значениях a выполнено неравенство $a^2 - 4 > -9$, поэтому уравнение $(a-2)x^2 + 6x = a+2$ имеет два решения. А значит, уравнение $(a-2)x^2 + 6x = 2-a$ не должно иметь решений. Это выполнено при $(a-2)^2 > 9$, то есть при $a < -1$ и при $a > 5$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при $a < -1$, $a = 0$, $a = 2$, $a > 5$.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{0, 2\} \cup (5; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно решены все три пункта	4
Верно решены два пункта: a и b или b и v	3
Верно решены два пункта: a и v или один пункт b	2
Верно решен только один из пунктов: a или v	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Нет, поскольку $1 + 2076$ не делится на 2, а 2076 не является квадратом натурального числа.

б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку $2076 - 1$ не делится на 3.

Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку 2076 не является кубом натурального числа.

Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую, то эти числа: $1, q, q^2, 2q^2 - q$, но уравнение $2q^2 - q - 2076 = 0$ не имеет целых корней.

Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три — геометрическую, то эти числа: $1, a+1$ и $2a+1$ где a — натуральное число. Тогда последнее число должно равняться

$$\frac{(2a+1)^2}{a+1} = 4a + \frac{1}{a+1},$$

но это не натуральное число.

в) Да, например $1, 2, 4, 6, 8, \dots, 2076$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.