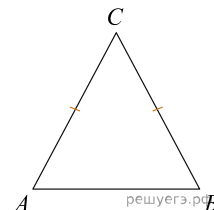


Вариант 162

№ 1.

Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30° . Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 25.

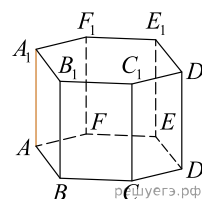


№ 2.

Даны векторы $\vec{a} = (2; 1)$, $\vec{b} = (2; -4)$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a} + \vec{b}$ и $7\vec{a} - \vec{b}$.

№ 3.

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 30. Найдите тангенс угла между прямыми $C_1 F$ и AA_1 .



№ 4.

Из множества натуральных чисел от 10 до 19 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет нечётных чисел, а чётные числа 2, 4 и 6 встречаются по два раза. В остальных кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 4 и 6 очков. Какова вероятность того, что бросали первый кубик?

№ 6.

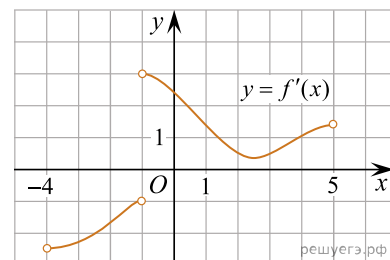
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$.

№ 7.

Найдите значение выражения: $4\sqrt{2}\cos^2\frac{15\pi}{8} - 2\sqrt{2}$.

№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на полуинтервале $[-4; 5)$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

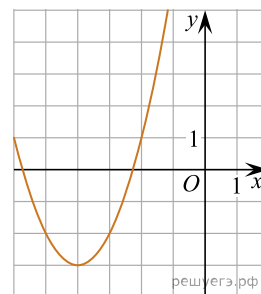
Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 5000 \text{ км/ч}^2$. Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 100 км/ч .

№ 10.

Первый насос наполняет бак за 20 минут, второй — за 30 минут, а третий — за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

№ 11.

На рисунке изображён график функции вида $y = a \sin(bx + c)$, где числа a , b и c — целые. Найдите



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = (x+3)^2 e^{-3-x}$ на отрезке $[-5; -1]$.

№ 13.

- Решите уравнение $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sqrt{3} \sin^2 x = \sin x - 2\sqrt{3}$.
- Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 14.

На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, а на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 3 : 5$. Известно, что $AB = 5\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 16$.

- Докажите, что плоскость EFD_1 делит ребро $B_1 C_1$ на два равных отрезка.
- Найдите угол между плоскостью EFD_1 и плоскостью $AA_1 B_1$.

№ 15.

Решите неравенство: $9^{\lg x} + x^{2 \lg 3} \geq 6$.

№ 16.

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 1 100 000 рублей на срок 4 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года.
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.
- в первые три года (2027, 2028 и 2029гг.) заемщик выплачивает только начисленные проценты, оставляя тело кредита неизменным.

В 2030 году заемщик выбирает одну из двух стратегий погашения остатка:

- 1) Стратегия «Рассрочка»: Погасить весь оставшийся долг двумя равными платежами в 2030 и 2031 годах.
- 2) Стратегия «Досрочный рывок»: Выплатить в 2030 году фиксированную сумму, чтобы остаток долга на начало 2031 года (сразу после начисления процентов в январе) стал ровно в два раза меньше, чем он был бы при стратегии «Рассрочка» в тот же момент времени.

На сколько рублей общая сумма выплат по второй стратегии будет меньше, чем по первой, если во втором случае кредит также будет полностью погашен в 2031 году?

№ 17.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ .

- а) Докажите, что угол PAC равен углу PQC .
- б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-2a} + \sqrt{x^2+4ax+4a^2} = 2$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 19.

Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_7$ состоит из неотрицательных однозначных чисел. Пусть M_k — среднее арифметическое всех членов этой последовательности, кроме k -го. Известно, что $M_1 = 1$, $M_2 = 2$.

- а) приведите пример такой последовательности, для которой $M_3 = 1,5$.
- б) существует ли такая последовательность, для которой $M_3 = 3$?
- в) Найдите наибольшее возможное значение M_3 .

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27620	10
2	680501	15
3	654825	2

4	320179	0,3
5	508892	0,2
6	26653	4
7	563891	2
8	551782	-10
9	27987	1
10	99615	10
11	564646	61
12	77484	0

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Пусть $\sin x = t$, тогда получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{3t-4}{t-1} + \frac{1}{t^2-t} = 1 &\Leftrightarrow \frac{3t-4}{t-1} + \frac{1}{t(t-1)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{3t^2-4t+1-(t^2-t)}{t(t-1)} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{2t^2-3t+1}{t(t-1)} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-3t+1=0, \\ t(t-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t=1, \\ t=\frac{1}{2}, \end{bmatrix} \\ t(t-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}. \quad \frac{3t-4}{t-1} + \frac{1}{t^2-t} = 1 \Leftrightarrow \frac{3t-4}{t-1} + \frac{1}{t(t-1)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \frac{3t^2-4t+1-(t^2-t)}{t(t-1)} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2t^2-3t+1}{t(t-1)} = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-3t+1=0, \\ t(t-1) \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} t=1, \\ t=\frac{1}{2}, \end{bmatrix} \\ t(t-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$, с помощью двойных неравенств:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq 2\pi &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq 2k \leq \frac{11}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow k=0; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{6} + 2k \leq 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq 2k \leq \frac{11}{6} &\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{11}{12} \Leftrightarrow k=0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{6} + 2n \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq 2n \leq \frac{7}{6} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow n=0. \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{6} + 2n \leq 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} \leq 2n \leq \frac{7}{6} &\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow n=0.
 \end{aligned}$$

Полученным значениям k, n соответствуют корни $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Так как $A_1E : EA = 3:1$ и $AA_1 = 16$, получаем, что $A_1E = 12$ и $EA = 4$. Так как $B_1F : FB = 3:5$ и $BB_1 = 16$, получаем, что $B_1F = 6$ и $FB = 10$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и CBB_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро B_1C_1 в такой точке T , что прямая FT параллельна прямой ED_1 . Значит, треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны, а поскольку $EA_1 = A_1D_1 = 12$, получаем, что и $FB_1 = B_1T = 6$. Значит, $TC_1 = 6$ и $B_1T : TC_1 = 1:1$.

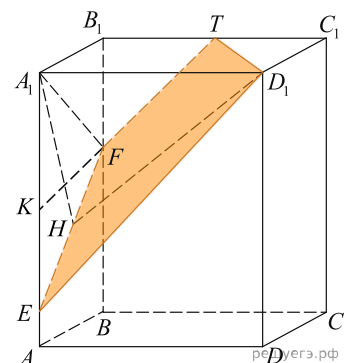
б) Опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EF пересечения плоскостей EFD_1 и AA_1B_1 . Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H . Для этого проведём в трапеции EA_1B_1F высоту $FK = 5\sqrt{2}$ (из результатов пункта а) следует, что K — середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EFA_1 , получим $A_1H \cdot EF = A_1E \cdot FK$, то есть

$$A_1H = \frac{FK \cdot A_1E}{EF} = \frac{5\sqrt{2} \cdot 12}{\sqrt{6^2 + (5\sqrt{2})^2}} = \frac{60}{\sqrt{43}}.$$

Тогда тангенс искомого угла равен

$$A_1D_1 : A_1H = 12 : \frac{60}{\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{43}}{5}.$$

Ответ: б) $\arctg \frac{\sqrt{43}}{5}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Решение неравенства ищем при условии $x > 0$. При этом условии $x^{2\lg 3} = x^{\lg 9} = 9^{\lg x}$, откуда

$$9^{\lg x} \geq 3 \Leftrightarrow \lg x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{10}.$$

Ответ: $[\sqrt{10}; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Так как в первые три года заемщик выплачивает начисленные проценты, к началу 2030 года долг останется равным 1 100 000 руб. Найдем сумму выплат при выборе стратегии «Рассрочка». Пусть x — размер платежа. Так как долг погашается двумя равными платежами, получаем:

$$(1\,100\,000 \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x = 0 \Leftrightarrow 1\,584\,000 - 1,2x - x = 0 \Leftrightarrow 2,2x = 1\,584\,000 \Leftrightarrow x = 720\,000.$$

Сумма выплат при выборе этой стратегии составит $720\,000 \cdot 2 = 1\,440\,000$ руб.

Найдем сумму выплат при выборе стратегии «Досрочный выкуп». Определим, каким был долг в начале 2031 года, если бы была выбрана стратегия «Рассрочка»: $(1\,100\,000 \cdot 1,2 - 720\,000) \cdot 1,2 = 720\,000$ руб. Тогда при выборе стратегии «Досрочный выкуп» в начале 2031 года после начисления процентов долг будет равен $\frac{720\,000}{2} = 360\,000$ руб. Следовательно, до начисления процентов долг равен $\frac{360\,000}{1,2} = 300\,000$ руб. Находим размер выплаты, произведенной в 2030 году:

$$1\,100\,000 \cdot 1,2 - 300\,000 = 1\,020\,000 \text{ руб.}$$

При выборе стратегии «Досрочный выкуп» сумма выплат составит $1\,020\,000 + 360\,000 = 1\,380\,000$ руб. Это меньше, чем сумма выплат по первой стратегии на $1\,440\,000 - 1\,380\,000 = 60\,000$ руб.

Ответ: 60 000 руб.

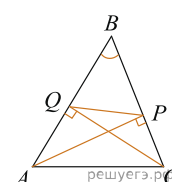
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) или имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) или при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, или обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Углы APC и AQC — прямые, значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности с диаметром AC , а следовательно, равны и вписанные углы PAC и PQC этой окружности, опирающиеся на дугу PC , что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники ABP и CBQ имеют общий угол ABC , следовательно, они подобны, откуда $\frac{BQ}{BP} = \frac{BC}{BA}$ или $\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA}$, но тогда и треугольники BAC и BPQ также подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA} = \cos \angle ABC$, откуда $AC = \frac{PQ}{\cos \angle ABC} = \frac{8}{\cos 60^\circ} = 16$. Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABC , равен $R = \frac{AC}{2 \sin \angle ABC} = \frac{16}{2 \sin 60^\circ} = \frac{16}{\sqrt{3}}$.



Ответ: $\frac{16}{\sqrt{3}}$.

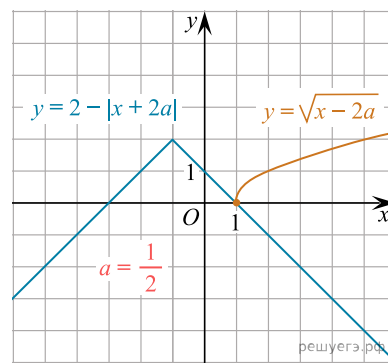
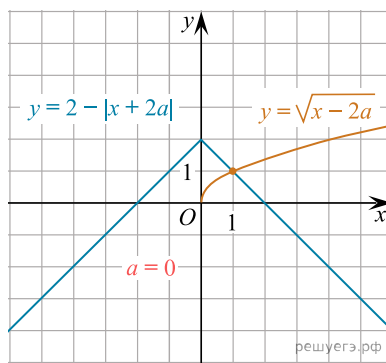
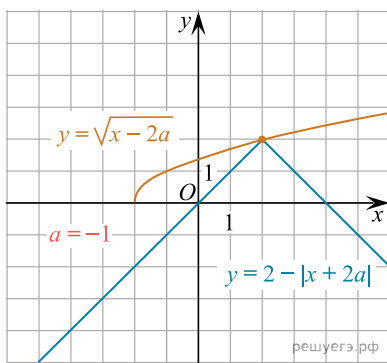
№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x-2a} + \sqrt{x^2+4ax+4a^2} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x-2a} + \sqrt{(x+2a)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2a} = 2 - |x+2a|. \quad \sqrt{x-2a} + \sqrt{x^2+4ax+4a^2} = 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x-2a} + \sqrt{(x+2a)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2a} = 2 - |x+2a|. \quad \sqrt{x-2a} + \sqrt{x^2+4ax+4a^2} = 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x-2a} + \sqrt{(x+2a)^2} = 2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x-2a} = 2 - |x+2a|.
 \end{aligned}$$

Построим графики левой и правой частей полученного уравнения. График функции $y = \sqrt{x-2a}$ получается из графика $y = \sqrt{x}$ смещением на $2a$ вправо (при отрицательных значениях a — влево). График функции $y = 2 - |x+2a|$ получается из графика $y = -|x|$ смещением на 2 вверх и на $2a$ влево (при отрицательных значениях a — вправо). Уравнение будет иметь решения тогда и только тогда, когда графики левой и правой частей имеют общие точки. Изобразим граничные случаи.



При отрицательных значениях параметра a , решения будут, если вершина графика $y = 2 - |x + 2a|$, координаты которой $(-2a; 2)$, находится не ниже графика $y = \sqrt{x - 2a}$. Найдём значения параметра, подставив координаты этой точки в $y \geq \sqrt{x - 2a}$:

$$2 \geq \sqrt{-2a - 2a} \Leftrightarrow 4 \geq -4a \geq 0 \Leftrightarrow_{a < 0} -1 \leq a < 0$$

При неотрицательных значениях параметра a , решения будут, если вершина графика $y = \sqrt{x - 2a}$, координаты которой $(2a; 0)$, находится не выше графика $y = 2 - |x + 2a|$. Найдём значения параметра, подставив координаты этой точки в $y \leq 2 - |x + 2a|$:

$$0 \leq 2 - |2a + 2a| \Leftrightarrow |4a| \leq 2 \Leftrightarrow_{a \geq 0} 0 \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, уравнение имеет хотя бы одно решение при $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в п. а; — верное доказательство в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Например, последовательность 6, 0, 3, 1, 1, 1, 0 удовлетворяет условию задачи.

б) Если $M_1 = 1$, $M_3 = 3$, получаем:

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 18,$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 6,$$

откуда $a_1 - a_3 = 12$, что невозможно, поскольку последовательность должна состоять из однозначных чисел. Значит, не существует такой последовательности, для которой $M_3 = 3$.

в) Поскольку $M_1 = 1$, получаем:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 6,$$

а поскольку $a_1 - a_3 \leq 9$, получаем:

$$a_1 + a_2 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 15,$$

то есть $M_3 \leq 2,5$.

В последовательности 9, 3, 0, 1, 1, 1, 0 имеем:

$$M_1 = 1, M_2 = 2, M_3 = 2,5.$$

Ответ: а) например, 6, 0, 3, 1, 1, 1, 0; б) нет; в) 2,5.
