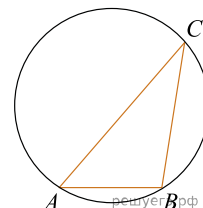


Вариант 164

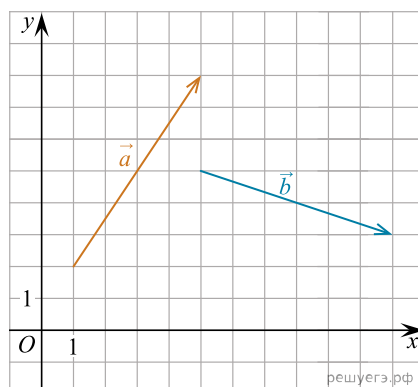
№ 1.

Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите острый угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах



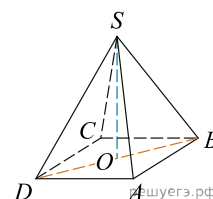
№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.



№ 3.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SD = 10$, $SO = 6$. Найдите длину отрезка AC .



№ 4.

В группе туристов 30 человек. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 6 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист П. полетит первым рейсом вертолёта.

№ 5.

Агрофирма закупает куриные яйца только в двух домашних хозяйствах. Известно, что 5% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 30% яиц высшей категории. В этой агрофирме 15% яиц высшей категории. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

№ 6.

Найдите корень уравнения $\sqrt{-32-x}=2$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{50 \sin 19^\circ \cdot \cos 19^\circ}{\sin 38^\circ}$.

№ 8.

Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

№ 9.

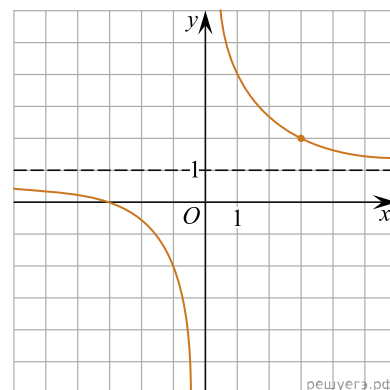
По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

№ 10.

Смешали некоторое количество 15%-го раствора некоторого вещества с таким же количеством 19%-го раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 0,8.



№ 12.

Найдите точку минимума функции $y = (x+3)^2 e^{2-x}$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin(3x - \pi) = \sin x$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$.

№ 14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB=4$, $BC=3$, $AA_1=2$. Точки P и Q — середины рёбер $A_1 B_1$ и CC_1 соответственно. Плоскость APQ пересекает ребро $B_1 C_1$ в точке K .

а) Докажите, что $B_1 K : KC_1 = 2 : 1$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью APQ .

№ 15.

Решите неравенство $\log_2 \frac{8}{x} - \frac{10}{\log_2 16x} \geq 0$.

№ 16.

15 декабря 2026 года планируется взять кредит размером 4 миллиона рублей на срок 48 месяцев. Условия возврата кредита таковы:

- 1 числа каждого месяца сумма долга возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15 декабря 2030 года долг должен быть полностью погашен.

Чему равно A , если общая сумма платежей в 2030 году составит 6390 тысяч рублей?

№ 17.

Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон BC , AB и AC в точках K , L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A .

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC .

б) Пусть $\angle ABC = 90^\circ$, $AM=3$, $CM=2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB , а T — такая точка на отрезке PQ , что $\angle OAT = 45^\circ$. Найдите QT .

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 5^{x+y} \leq \frac{24a-15}{3a-2}, \\ 3 \cdot 5^{x+y} - 4 \cdot 25^y \geq 8 \end{cases}$$

имеет решение.

№ 19.

На доске в первой строке написано два натуральных числа n и $n+1$, а во второй строке по одному разу записаны те и только те натуральные числа, которые являются делителями одного из чисел первой строки. Например, если в первой строке написаны числа 3 и 4, то во второй строке написаны числа 1, 2, 3 и 4.

- Может ли во второй строке быть написано ровно 6 чисел?
- Может ли во второй строке быть написано ровно 4 числа, если $n > 4$?
- Сколько существует таких чисел $n < 2000$, для которых во второй строке написано чётное количество чисел?

Ответы

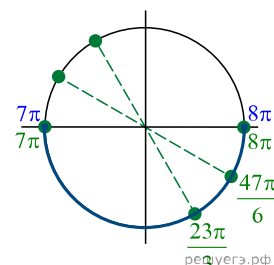
Номер	Задание	Ответ
1	27919	30
2	644849	12
3	914	16
4	320194	0,2
5	320751	0,6
6	510839	-36
7	510312	25
8	119974	7
9	27972	4
10	99572	17
11	508961	-15
12	26729	-3

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Применим формулы приведения и формулу разности косинусов, затем разложим полученное выражение на множители:

$$\begin{aligned}
 \sin\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) &= \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos 3x - \cos x = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 2 \sin 2x \sin x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (2 \sin 2x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \sin\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \cos 3x - \cos x = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow 2 \sin 2x \sin x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \sin x (2 \sin 2x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \end{cases} \sin\left(3x - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \cos 3x - \cos x = \sqrt{3} \sin x \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 2 \sin 2x \sin x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \end{cases}
\end{aligned}$$

б) Отберём корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходят 7π , $\frac{23\pi}{3}$, $\frac{47\pi}{6}$, 8π .

Ответ: а) $\left\{ \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) 7π , $\frac{23\pi}{3}$, $\frac{47\pi}{6}$, 8π .

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть прямые AP и BB_1 пересекаются в точке X (см.рис.). Тогда точка K — точка пересечения прямых XQ и B_1C_1 . Треугольники AXB и PXB_1 подобны, откуда

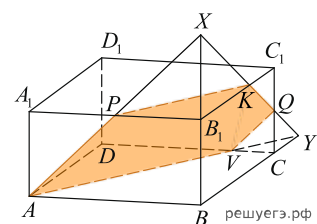
$$\frac{XB_1}{XB} = \frac{PB_1}{AB} = \frac{1}{2};$$

$$B_1X = BB_1 = 2.$$

Треугольники B_1XK и C_1QK тоже подобны, а потому

$$\frac{B_1K}{C_1K} = \frac{B_1X}{C_1Q} = 2;$$

$$B_1K = 2C_1K.$$



Значит, $B_1K : KC_1 = 2 : 1$.

б) Пусть Y — точка пересечения прямых QX и BC , а V — точка пересечения прямых CD и AY . Тогда пятиугольник $APKQV$ — сечение, площадь которого надо найти. Треугольники C_1KQ и CYQ равны, откуда $CY = C_1K = 1$. Треугольники AYB и VYC подобны, откуда $\frac{VC}{AB} = \frac{CY}{BY} = \frac{1}{4}$, $VC = \frac{AB}{4} = 1$. Четырёхугольник $APKY$ — равнобедренная трапеция, в которой

$$AP = PK = KY = 2\sqrt{2},$$

$$AY = 4\sqrt{2}.$$

Треугольник QYV — равносторонний со стороной $\sqrt{2}$, его площадь $S_{QYV} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Вычислим высоту трапеции $APKY$, $h = \sqrt{AP^2 - \left(\frac{AY - PK}{2}\right)^2} = \sqrt{6}$. Таким образом, её площадь $S_{APKY} = \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{6} = 6\sqrt{3}$. Значит, искомая площадь равна

$$S_{APKY} - S_{QYV} = 6\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

Приведем решение Александра Турбанова (Липецк).

Проведем прямую AP , проведем прямую QT параллельную прямой AP , соединим точки A и T , проведем прямую PK параллельно прямой AT , соединим точки K и Q . Пятиугольник $APKQT$ — искомое сечение.

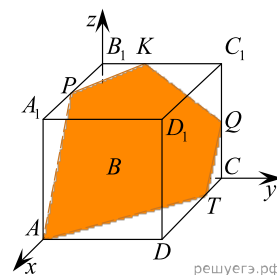
Введем прямоугольную систему координат с началом в точке B , как показано на рисунке. В этой системе координат: $B(0; 0; 0)$,

$$A(4; 0; 0),$$

$$C(0; 3; 0),$$

$$P(2; 0; 2),$$

$$Q(0; 3; 1).$$



Подставим координаты точек плоскости A , P и Q в уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, получим:

$$\begin{cases} 4A + D = 0, \\ 2A + 2C + D = 0, \\ 3B + C + D = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим $A = -\frac{D}{4}$. Подставим во второе уравнение и выразим C :

$$2A + 2C + D = 0 \Leftrightarrow 2C = -\frac{1}{2}D \Leftrightarrow C = -\frac{D}{4}.$$

Находим B :

$$3B + C + D = 0 \Leftrightarrow 3B = -\frac{3}{4}D \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4}D.$$

Получаем уравнение плоскости APQ :

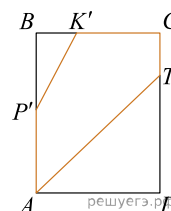
$$-\frac{D}{4}x - \frac{D}{4}y - \frac{D}{4}z + D = 0 \Leftrightarrow_{D \neq 0} x + y + z - 4 = 0,$$

По условию $B_1K : KC_1 = 2 : 1$, тогда $K(0; 2; 2)$. Подставим координаты точки K в уравнение плоскости APQ : $0 + 2 + 2 - 4 = 0$ — равенство верно, значит, точка K принадлежит плоскости α . Следовательно, $B_1K : KC_1 = 2 : 1$.

б) Спроектируем сечение $APKQT$ на плоскость ABC , получим пятиугольник $APK'CT$ (см.рис.). Треугольники AA_1P и QCT подобны по двум углам, значит, $CT=1$ и $TD=3$. Поэтапно найдем площадь $APK'CT$:

$$S_{ABCD} = 3 \cdot 4 = 12,$$

$$S_{ADT} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2},$$



$$S_{BP'K'} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2,$$

$$S_{AP'K'CT} = 12 - 2 - \frac{9}{2} = \frac{11}{2}.$$

Найдем угол между плоскостью сечения и плоскостью проекции. Вектор нормали к плоскости APQ имеет координаты $\vec{n}_1 = (1; 1; 1)$. Нормалью к плоскости основания ABC является вектор $\vec{n}_2(0; 0; 1)$. Косинус угла между плоскостями равен модулю косинуса угла между нормальными к ним:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|(0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1)|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

По теореме о площади ортогональной проекции получаем:

$$S = \frac{S_{\text{пр}}}{\cos \varphi} = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Относительно $t = \log_2 x$ неравенство имеет вид:

$$3 - t - \frac{10}{t+4} \geq 0, \frac{(3-t) \times (t+4) - 10}{t+4} \geq 0, \frac{-t^2 - t + 2}{t+4} \geq 0, \frac{(t+2) \times (1-t)}{t+4} \geq 0. \quad 3 - t - \frac{10}{t+4} \geq 0, \frac{(3-t) \times (t+4) - 10}{t+4} \geq 0, \frac{-t^2 - t + 2}{t+4} \geq 0, \frac{(t+2) \times (1-t)}{t+4} \geq 0.$$

Значит, $t < -4$ или $-2 \leq t \leq 1$. Возвращаясь к x , получаем:

$$\log_2 x < -4 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{16}$$

или

$$-2 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq 2.$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{16}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; 2\right]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Составим график погашения кредита:

Номер месяца	Долг	Часть платежа в уплату долга	Проценты
1	A	$\frac{A}{48}$	$0,01A$
2	$\frac{47}{48}A$	$\frac{A}{48}$	$0,01 \cdot \frac{47}{48}A$
...	...	...	...
37	$\frac{12}{48}A$	$\frac{A}{48}$	$0,01 \cdot \frac{12}{48}A$
38	$\frac{11}{48}A$	$\frac{A}{48}$	$0,01 \cdot \frac{11}{48}A$
...	...	...	...
48	$\frac{1}{48}A$	$\frac{A}{48}$	$0,01 \cdot \frac{1}{48}A$

Общая сумма платежей в 2030 году равна сумме платежей с 37 по 48 месяцы и составляет 6390 тыс. руб., то есть 6,39 млн руб. Имеем:

$$\begin{aligned} &12 \cdot \frac{A}{48} + 0,01 \cdot \frac{12}{48}A + 0,01 \cdot \frac{11}{48}A + \dots + 0,01 \cdot \frac{1}{48}A = 6,39 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}A + 0,01A \left(\frac{12}{48} + \frac{11}{48} + \dots + \frac{1}{48} \right) = 6,39 \Leftrightarrow \frac{1}{4}A + 0,01A \cdot \frac{\frac{12}{48} + \frac{1}{48}}{2} \cdot 12 = 6,39 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,25A + 0,01A \cdot 1,625 = 6,39 \Leftrightarrow 0,26625A = 6,39 \Leftrightarrow A = 24. \end{aligned}$$

Таким образом, планируется взять кредит на сумму 24 млн руб.

Ответ: 24.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> и использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Отрезки $СК$ и $СМ$ являются отрезками касательных, проведенных из точки $С$ к окружности с центром в O , следовательно, они равны, значит, равны углы $СКМ$ и $СМК$. Отрезки $АМ$ и $АР$ равны, поскольку являются радиусами окружности с центром в точке A . Следовательно, треугольник $РАМ$ равнобедренный, углы $АРМ$ и $АМР$ при его основании равны. Углы $АМР$ и $КМС$ равны как вертикальные, а углы $КМС$ и $СМК$ равны как углы при основании равнобедренного треугольника $СМК$.

Итак,

$$\angle APM = \angle AMP = \angle KMC = \angle CMK,$$

а потому прямые $АР$ и BC параллельны.

б) Отрезки BK и BL равны, обозначим их длины x . Тогда

$$(x+3)^2 + (x+2)^2 = (3+2)^2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Из подобия треугольников BKQ и APQ следует:

$$\frac{BK}{AP} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{BQ}{AQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow BQ = 2, AQ = 6.$$

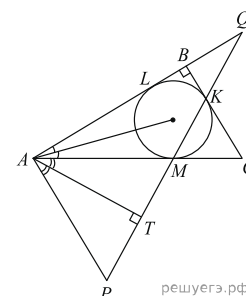
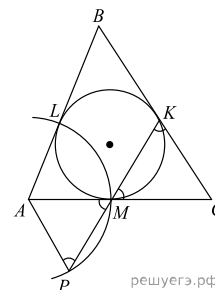
Воспользуемся теоремой Пифагора в треугольнике APQ :

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 = AM^2 + AQ^2 = 36 + 9 = 45 \Leftrightarrow PQ = 3\sqrt{5}.$$

Далее, AO является биссектрисой угла BAC , а угол OAT по условию равен половине угла BAP , поэтому AT — биссектриса угла MAP . Треугольник MAP равнобедренный, поэтому AT перпендикулярно PQ . Теперь, используя подобие треугольников QAP и QTA , получаем:

$$\frac{AQ}{TQ} = \frac{PQ}{AQ} \Leftrightarrow QT = \frac{AQ^2}{PQ} = \frac{36}{3\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2

В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Сделаем замену переменных: $u = 5^x > 0$, $v = 5^y > 0$. Тогда система неравенств примет вид:

$$\begin{cases} u^2 - uv \leq \frac{24a-15}{3a-2}, & (*) \\ 3uv - 4v^2 \geq 8. \end{cases}$$

Вычтем из первого неравенства системы второе получим неравенство:

$$u^2 - 4uv + 4v^2 \leq \frac{24a-15}{3a-2} - 8 \Leftrightarrow (u-2v)^2 \leq \frac{1}{3a-2}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что при $a \leq \frac{2}{3}$ система решений не имеет. Покажем, что при $a > \frac{2}{3}$ система имеет решение. Возьмем $u = 2v$, тогда исходная система примет вид:

$$\begin{cases} 2v^2 \leq \frac{24a-15}{3a-2}, \\ 2v^2 \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \leq 2v^2 \leq \frac{24a-15}{3a-2} \Leftrightarrow 8 \leq 2v^2 \leq 8 + \frac{1}{3a-2}. \quad \begin{cases} 2v^2 \leq \frac{24a-15}{3a-2}, \\ 2v^2 \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow 8 \leq 2v^2 \leq \frac{24a-16+1}{3a-2} \Leftrightarrow 8 \leq 2v^2 \leq 8 + \frac{1}{3a-2}.$$

При всех $a > \frac{2}{3}$ двойное неравенство, а следовательно, и система (*) имеют решение $\begin{cases} u=4, \\ v=2. \end{cases}$ Значит, при всех $a > \frac{2}{3}$ пара чисел $(\log_5 4; \log_5 2)$ будет являться решением исходной системы, то есть система будет иметь хотя бы одно решение.

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да, для чисел 25 и 26 в первой строке будут написаны числа 1, 2, 5, 13, 25, 26 во второй строке.

б) Ясно, что числа 1, n , $n+1$ будут написаны. Значит, кроме них должно быть еще ровно одно число. Если число простое, то у него два делителя. Если составное и при этом не точный квадрат, то число запишется в виде ab и даст еще два делителя a и b . Если же число точный квадрат, но не простого числа, то его тоже можно будет записать как произведение различных чисел. Поэтому одно из чисел n и $n+1$ простое, а другое — квадрат простого. Но при $n > 4$ квадраты простых чисел будут нечетны, а два нечетных числа не могут идти подряд.

в) Заметим, что только единица может быть общим делителем чисел n и $n+1$. Это следует из того, что их разность делится на любой их общий делитель, но равна 1. Поэтому если эти числа имеют a и b делителей соответственно, на доску будет выписано $a+b-1$ число. Значит, a и b должны иметь разную четность.

Все делители числа можно разбить на пары, дающие в произведении само число, поэтому обычно их количество четно. Исключение составляют ситуации, когда один из делителей — пара к самому себе (а число, следовательно, его квадрат) и в такой ситуации число делителей нечетно.

Итак, подходят только те пары, где одно из чисел n и $n+1$ — точный квадрат. Поскольку

$$44^2 = 1936 < 1998 < 2000 < 2025 = 45^2,$$

есть 44 пары, в которых число n является точным квадратом, и 43 пары, в которых число $n+1$ — точный квадрат, $n+1 \neq 1$. Кроме того, квадраты не могут отличаться на 1, поскольку даже между соседними квадратами разность минимум $2^2 - 1^2 = 3$. Поэтому все эти пары действительно подходят.

Ответ: а) да; б) нет; в) 87.
