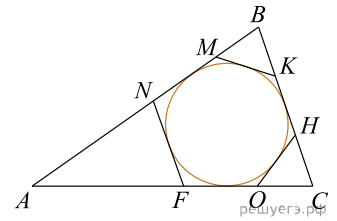


Вариант 165

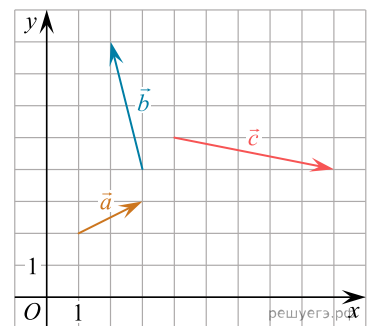
№ 1.

К окружности, вписанной в треугольник ABC , проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



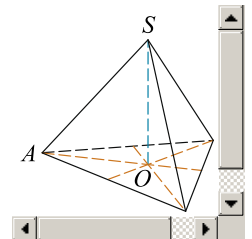
№ 2.

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите значение выражения $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$.



№ 3.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ медианы основания ABC пересекаются в точке O . Площадь треугольника ABC равна 9; объем пирамиды равен 6. Найдите длину отрезка OS .



№ 4.

За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 6.

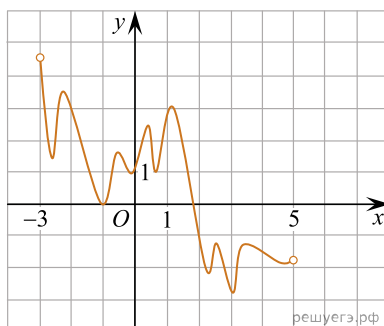
Найдите корень уравнения $5^{x-7} = \frac{1}{125}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[8]{7}}{\sqrt[6]{7}}$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



№ 9.

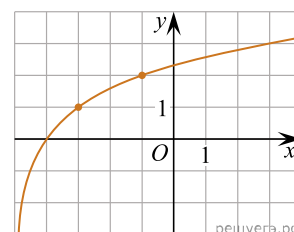
Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

№ 10.

Часы со стрелками показывают 8 часов ровно. Через сколько минут минутная стрелка в четвертый раз поравняется с часовой?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите $f(11)$.



№ 12.

Найдите точку минимума функции $y = 7 + 12x - x^3$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin^3 x \cdot \cos x + 1 = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos^3 x$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-\arctg 2; \pi)$.

№ 14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $BC=5$ и $AB = AA_1=8$. M и N — середины ребер CD и AA_1 соответственно. Плоскость α проходит через точки M и B и параллельна прямой CD_1 .

- Докажите, что прямая DM параллельна плоскости α .
- Найдите расстояние между прямыми C_1D и BD_1 .

№ 15.

Решите неравенство $x^3 + 5x^2 + \frac{30x^2 + x - 8}{x - 8} \leq 1$.

№ 16.

В растворе X содержится 30% вещества A и 50% вещества B , в растворе Y содержится 50% вещества A и 40% вещества B , в растворе Z содержится 80% вещества A и 10% вещества B . В результате смешивания получился раствор, содержащий 60% вещества A . Найдите наименьшее возможное содержание вещества B в получившемся растворе.

№ 17.

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O . Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD , и пересекающую боковые стороны AB и CD в точках M и N соответственно.

- Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.
- Найдите длину основания AD , если $AD = CD$, $BC=31$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 4 : 5$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ((x+5)^2 + y^2 - a^2) \ln(9 - x^2 - y^2) = 0, \\ ((x+5)^2 + y^2 - a^2)(x + y - a + 5) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№ 19.

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

- Найдите все p , если $q = 36$.
- Найдите все q , если $q + 2p = 37$.
- Найдите все корни уравнения, если $q^3 - p^3 = 3887$.