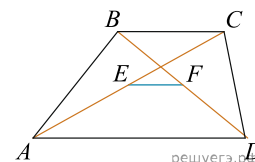


Вариант 168

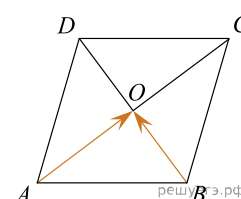
№ 1.

Основания трапеции равны 3 и 2. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.



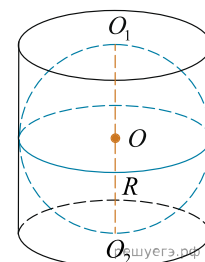
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AO} - \vec{BO}$.



№ 3.

Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 24. Найдите объем цилиндра.

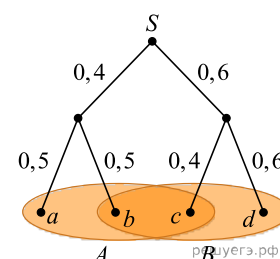


№ 4.

В группе туристов 5 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

№ 5.

На рисунке показано дерево некоторого случайного эксперимента. Событию A благоприятствуют элементарные события a, b и c , а событию B благоприятствуют элементарные события b, c и d . Найдите $P(A|B)$ — условную вероятность события A при условии B .



№ 6.

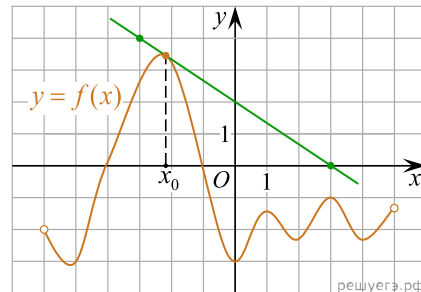
Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} = 5^{x+5}$.

№ 7.

Найдите значение выражения $(432^2 - 568^2) : 1000$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0 . Найдите значение производной функции $g(x) = 6f(x) - 3x$ в точке x_0 .



№ 9.

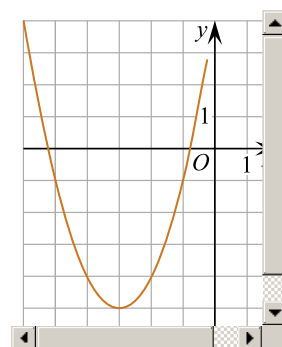
При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решетке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решетке с периодом, не превосходящим 1600 нм?

№ 10.

Первый насос наполняет бак за 20 минут, второй— за 30 минут, а третий— за 1 час. За сколько минут наполнят бак три насоса, работая одновременно?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $f(1)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 3 \operatorname{tg} x - 3x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{7}{\operatorname{tg} x} + 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3\pi; 4\pi]$.

№ 14.

В пирамиде $FABC$ грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB : FA = 27 : 8$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 2, а точка M выбрана на ребре BC так, что $BM : MC = 1 : 2$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B . Центр сферы, описанной около пирамиды $FABC$, лежит на ребре AB , площадь поверхности этой сферы равна 16π .

- Докажите, что треугольники ABC и ABF — прямоугольные.
 - Найдите объем пирамиды $ACMT$.
-

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{8^{x+1} - 40}{2 \cdot 64^x - 32} \leq 1$.

№ 16.

Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика превысит 8 млн рублей.

№ 17.

Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а BH — высота этого треугольника.

- Докажите, что углы ABH и CBO равны.
 - Найдите BH , если $AB = 8$, $BC = 9$, $BH = BO$.
-

№ 18.

Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение $\log_{1-x}(a-x+2) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

№ 19.

Юра и Полина играют в игру с числами. Юра придумывает трёхзначное число и находит сумму его цифр. Полина вычитает из придуманного Юрой числа найденную сумму цифр и делит полученную разность на 3.

- Могло ли у Полины получиться число 222?
 - Могло ли у Полины получиться число 212?
 - Сколько всего различных чисел может получиться у Полины, если Юра будет придумывать числа от 100 до 800 включительно?
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27843	0,5

2	27718	10
3	245349	36
4	320181	0,4
5	509342	0,55
6	510820	-3
7	77390	-136
8	525688	-7
9	28008	30
10	99615	10
11	508943	11
12	26702	5

№ 13.

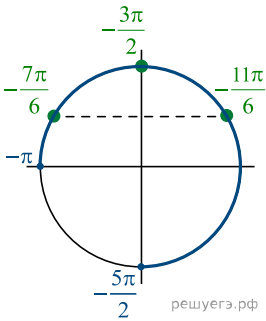
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Пусть $t = \frac{1}{\sin x}$, тогда имеем:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1, \\ t = 2, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{1}{\sin x} = 1, \\ \frac{1}{\sin x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$



б)С помощью числовой окружности (см.рис.) найдём корни из отрезка $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка O — центр описанной сферы. Тогда точка O — середина AB и, следовательно, $OA = OB = OC = OF$, то есть в треугольниках ABC и ABF медиана равна половине стороны, к которой проведена. Следовательно, эти треугольники прямоугольные с вершинами при прямом угле C и F соответственно.

б) Площадь поверхности описанной сферы равна 16π , поэтому ее радиус

$$R = OA = OB = OC = OF = 2$$

и $AB=4$. Пусть точки H и K — проекции точек F и T на плоскость ABC соответственно. Плоскости ABF и ABC перпендикулярны, поэтому обе эти точки лежат на линии их пересечения — AB . Заметим, что точка K , как и точка T , равноудалена от точек B и M , следовательно, треугольник BKM равнобедренный, пусть отрезок KL — его высота. Тогда прямые KL и AC параллельны. Пусть теперь точка G — проекция точки C на плоскость ABF . Плоскости ABC и ABF перпендикулярны, поэтому точка G лежит на линии их пересечения AB . Это означает, что прямая AB является проекцией прямой BC на плоскость ABF и угол CBA равен углу между прямой BC и плоскостью ABF . Таким образом, $\operatorname{tg} \angle ABC = \operatorname{tg} \angle(BC, ABF) = 2$, то есть $AC = 2BC$. Находим:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow 5BC^2 = 16 \Leftrightarrow BC = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

значит,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = BC^2 = \frac{16}{5},$$

$$S_{ACM} = \frac{MC}{BC} S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{16}{5} = \frac{32}{15}.$$

Треугольники BKL и ABC подобны, следовательно,

$$\frac{BK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{BM}{2BC} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow BK = \frac{1}{6} AB = \frac{2}{3},$$

$$AK = AB - BK = \frac{10}{3}.$$

Треугольники ABC , BFH , ABH и ATK подобны, следовательно,

$$\frac{TK}{AK} = \frac{BH}{FH} = \frac{FH}{AH} = \frac{FB}{FA} = \frac{27}{8},$$

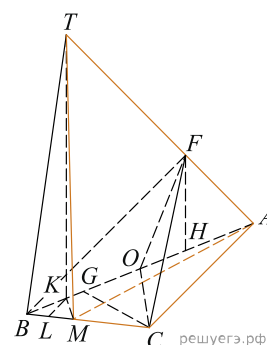
$$\frac{AH}{BH} = \frac{AH}{FH} \cdot \frac{FH}{BH} = \frac{64}{729},$$

$$TK = \frac{27}{8} AK = \frac{90}{8},$$

Таким образом, объем пирамиды $ACMT$ равен

$$V_{ACMT} = \frac{1}{3} S_{ACM} \cdot TK = 8.$$

Ответ: б) 8.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $t = 8^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{4t-20}{t^2-16} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{t^2-4t+4}{t^2-16} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(t-2)^2}{(t-4)(t+4)} \geq 0,$$

откуда $t < -4$; $t = 2$; $t > 4$.

При $t < -4$ получим $8^x < -4$, решений нет.

При $t = 2$ получим $8^x = 2$, откуда $x = \frac{1}{3}$.

При $t > 4$ получим $8^x > 4$, откуда $x > \frac{2}{3}$.

Решение исходного неравенства: $x = \frac{1}{3}$; $x > \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{3}\right\} \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначим размер кредита за S млн рублей. В конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает по $0,2S$. Всего $0,4S$ за два года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 3-го года долг возрастет до $1,2S$. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 3-го и 4-го годов. После выплаты в конце 3-го года долг равен $1,2S - x$, в середине 4-го года он равен $1,2(1,2S - x)$. В конце 4-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1,2(1,2S - x)$ и по условию равна x .

Значит,

$$1,2(1,2S - x) = x \Leftrightarrow 2,2x = 1,44S \Leftrightarrow x = \frac{36S}{55},$$

и общий размер выплат равен

$$0,4S + 2 \cdot \frac{36S}{55} = \frac{94S}{55}.$$

По условию

$$\frac{94S}{55} > 8 \Leftrightarrow 94S > 440 \Leftrightarrow S > 4\frac{32}{47}.$$

Наименьшее целое $S = 5$.

Ответ: 5 млн руб.

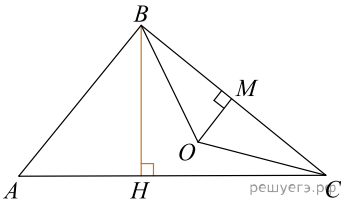
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Обозначим угол BAC через α . Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, поскольку является центральным углом, опирающимся на ту же дугу окружности, что и угол BAC . В равнобедренном треугольнике BOC получаем $\angle CBO = 90^\circ - \alpha$, а в прямоугольном треугольнике BAH получаем $\angle ABH = 90^\circ - \alpha$. Таким образом, $\angle CBO = \angle ABH$.

б) Пусть M — середина отрезка BC . Прямоугольные треугольники BAH и BOM подобны, поскольку $\angle ABH = \angle OBM$. Значит,

$$\frac{BH}{AB} = \frac{BM}{BO} \Leftrightarrow BH^2 = \frac{AB \cdot BC}{2} \Leftrightarrow BH = \sqrt{\frac{AB \cdot BC}{2}} = 6.$$



Ответ: б) 6.

№ 18.

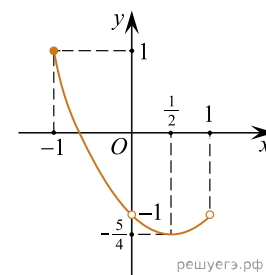
Критерии оценивания ответа на задание С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2

Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Выразим параметр a из заданного уравнения x :

$$\log_{1-x}(a-x+2) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \\ a-x+2 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0, \\ a = x^2 - x - 1. \end{cases} \log_{1-x}(a-x+2) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \\ a-x+2 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0, \\ a = x^2 - x - 1. \end{cases}$$



Исходное уравнение имеет решения на полуинтервале $[-1; 1)$ тогда и только тогда, когда прямые $y = a$ имеют общие точки с графиком функции $y = x^2 - x - 1$ при условиях $-1 \leq x < 1$, $x \neq 0$. Таким образом, (см. рис.), искомыми значениями параметра являются $-\frac{5}{4} \leq a \leq 1$, исключая $a = -1$.

Ответ: $a \in \left[-\frac{5}{4}, -1\right) \cup (-1, 1]$.

Приведём другое решение.

Уравнение $\log_{1-x}(a-x+2) = 2$ равносильно системе

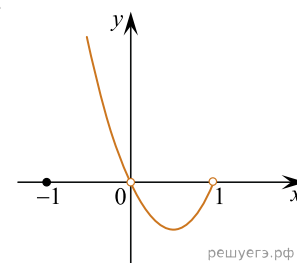
$$\begin{cases} x^2 - x - 1 - a = 0, \\ x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Эта система имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1, 1)$, если уравнение $x^2 - x - 1 - a = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий либо промежутку $[-1, 0)$, либо промежутку $(0, 1)$.

Поскольку графиком функции $f(x) = x^2 - x - 1 - a = 0$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $x = \frac{1}{2}$, уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(0, 1)$, при условии

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0, \\ f(1) = f(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\frac{1}{4} - a \leq 0, \\ -1 - a > 0, \end{cases}$$

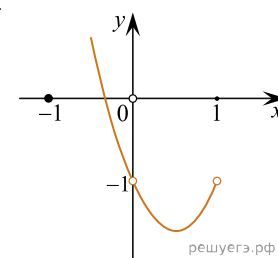
откуда $-\frac{5}{4} \leq a < -1$ (рис. 1).



Уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1, 0)$, при условии

$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - a < 0, \\ 1 - a \geq 0, \end{cases}$$

откуда $-1 < a \leq 1$ (рис. 2).



Уравнение $\log_{1-x}(a-x+2) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1, 1)$, при $-\frac{5}{4} \leq a < -1$ и при $-1 < a \leq 1$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4

Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Если у придуманного Юрой числа были цифры a, b, c , то Полина получит

$$\frac{100a + 10b + c - a - b - c}{3} = 33a + 3b.$$

Сразу отметим, что от последней цифры придуманного Юрой числа ответ не зависит, поэтому можно считать ее равной нулю.

а) Для числа 680 получим $33 \cdot 6 + 3 \cdot 8 = 222$.

б) Нетрудно заметить, что $33a + 3b$ кратно трем, поэтому не может быть равным 212.

в) Заметим, что

$$33a + 3b = 33x + 3y \Leftrightarrow 11(a - x) = y - b.$$

Но $|y - b| \leq 9$, поэтому выражение может быть кратно 11, только если равно нулю, то есть при $y = b$, тогда и $a = x$. Значит, все числа 100, 110, 120, ..., 800 дают различные результаты. Этим числам $80 - 10 + 1 = 71$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 71.
