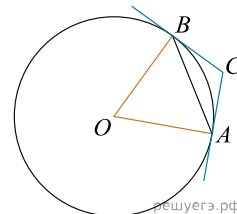


Вариант 174

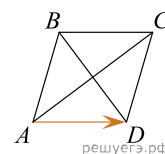
№ 1.

Через концы A, B дуги окружности в 62° проведены касательные AC и BC . Найдите угол ACB .
Ответ дайте в градусах.



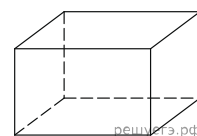
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AD}$.



№ 3.

Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите его площадь поверхности.



№ 4.

Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

№ 5.

При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

№ 6.

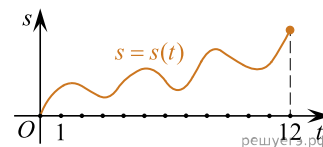
Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

№ 7.

Найдите значение выражения $(7x^3)^2 : (7x^6)$.

№ 8.

Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s .



Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).

№ 9.

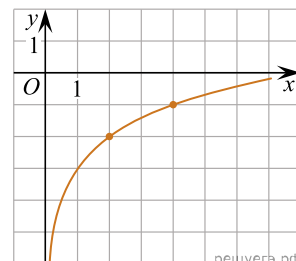
Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением $pV^{1.4} = \text{const}$, где p (атм.) — давление газа, V — объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

№ 10.

Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 1$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 4 \cos x - 20x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 13.

- Решите уравнение $\cos 2x - \sin^3 x \cdot \cos x + 1 = \sin^2 x + \sin x \cdot \cos^3 x$
- Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $(-\arctg 2; \pi)$.

№ 14.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB=4$, а боковое ребро $SA=7$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM = SK = 1$.

- Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC .
- Найдите объём пирамиды $BCKM$.

№ 15.

Решите неравенство: $(2^x + 0,09 \cdot 2^{-x})^{\frac{1}{2x}} \geq (2^x + 0,09 \cdot 2^{-x})^{\frac{1}{1-x}}$.

№ 16.

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 700 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n -го месяца долг составит 300 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 755 тысяч рублей.

№ 17.

На сторонах AC , AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC , ALB и BMC с прямыми углами K , L и M соответственно.

- а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM .
 - б) Найдите площадь треугольника KLM , если $LC = 6$.
-

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4 \cos x - 3 - a) \cdot \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

№ 19.

На столе лежит N монет по 2 рубля и $(1200 - N)$ монет по 5 рублей (N — натуральное число от 1 до 1199). Оказалось, что если взять любые 500 монет, то сумма денег, набранная этими монетами, будет не меньше четверти от общей суммы денег на столе.

- а) Может ли N равняться 400?
 - б) Может ли N равняться 600?
 - в) Сколько различных значений может принимать число N ?
-

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27879	118
2	27713	10
3	27128	22

4	282857	0,92
5	320196	0,035
6	77376	-1
7	26815	7
8	501059	6
9	27993	0,05
10	99604	38,4
11	509026	16
12	77496	11

№ 13.

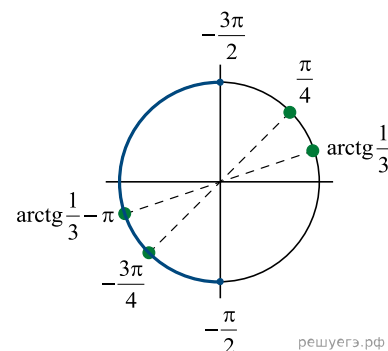
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Сведем уравнение к квадратному относительно тангенса:

$$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 4\sin x \cos x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\tg^2 x - 4\tg x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tg x = 1, \\ \tg x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \arctg \frac{1}{3} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности находим, что из найденных решений промежутку принадлежат числа $-\frac{3\pi}{4}$, $\arctg \frac{1}{3} - \pi$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k, \arctg \frac{1}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{3\pi}{4}$; $\arctg \frac{1}{3} - \pi$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть SO — высота пирамиды $SABCD$. Из условия следует, что $BK=6$, а $BM=3$. Пусть K — точка пересечения CM и BD . В треугольнике BCM имеем: $BM=3$, $BC=4$. Следовательно, $CM=5$. Отрезок BK — биссектриса в этом треугольнике, значит, $\frac{MK'}{K'C} = \frac{3}{4}$, откуда $MK' = \frac{3}{7}CM = \frac{15}{7}$. Пусть $BK = x$, применим теорему косинусов:

$$\frac{225}{49} = 9 + x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12\sqrt{2}}{7}, \\ x = \frac{9\sqrt{2}}{7}. \end{cases}$$

Корень $\frac{9\sqrt{2}}{7}$ является посторонним, поскольку $\frac{9\sqrt{2}}{7} < \frac{12}{5}$, то есть меньше высоты треугольника BCM . Теперь заметим, что $BO = 2\sqrt{2}$, откуда

$$\frac{BK}{BS} = \frac{6}{7} = \frac{BK'}{BO}.$$

Тогда треугольники BKK' и BSO подобны. Таким образом, KK' параллельна SO , а значит, плоскость CKM содержит прямую KK' , перпендикулярную ABC . Следовательно, плоскости CKM и ABC перпендикулярны.

б) Прямая KK' перпендикулярна плоскости ABC , поэтому она является высотой пирамиды $BCKM$ с основанием BCM . Площадь треугольника BCM равна 6. Найдем KK' :

$$KK' = \frac{6}{7}SO = \frac{6}{7}\sqrt{SB^2 - BO^2} = \frac{6\sqrt{41}}{7}.$$

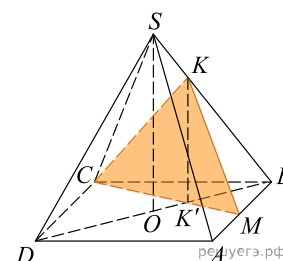
Тогда объем пирамиды $BCKM$ равен

$$V = \frac{1}{3} \cdot KK' \cdot S_{BCM} = \frac{12\sqrt{41}}{7}.$$

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{41}}{7}$.

Примечание: Отрезок BK может быть найден из более простых соображений. Заметим, что треугольники BKM и CKD подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{BK'}{K'D} = \frac{BM}{CD} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow K'D = \frac{4}{3}BK'$. При этом $BK' + K'D = BD = 4\sqrt{2}$, откуда $BK' = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.

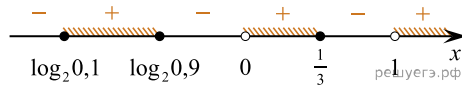
Можно по предложению **Альберта Власова** воспользоваться формулой длины биссектрисы прямоугольного треугольника CBM : $BK' = \sqrt{2} \cdot \frac{CB \cdot BM}{CB + BM} = \sqrt{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{4 + 3} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Воспользуемся методом рационализации и методом интервалов:

$$\begin{aligned}
 (2^x + 0,09 \cdot 2^{-x})^{\frac{1}{2x}} &\geq (2^x + 0,09 \cdot 2^{-x})^{\frac{1}{1-x}} \Leftrightarrow (2^x + 0,09 \cdot 2^{-x} - 1) \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{1-x} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{(2^x)^2 - 2^x + 0,09}{2^x} \cdot \frac{1-3x}{2x(1-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^x - 0,1)(2^x - 0,9)(1-3x)}{x(1-x)} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{(x - \log_2 0,1)(x - \log_2 0,9)(3x - 1)}{x(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 0,1 \leq x \leq \log_2 0,9, \\ 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ x > 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$



Ответ: $[\log_2 0,1; \log_2 0,9] \cup \left(0; \frac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть S тысяч рублей— тело кредита, x тысяч рублей— сумма, на которую равномерно уменьшается долг ежемесячно, $r = 0,01$.

Долг уменьшается равномерно, поэтому

$$n = \frac{700 - 300}{x} \Leftrightarrow x \cdot n = 400.$$

Тогда сумма выплат будут выглядеть следующим образом:

$$x \cdot n + S \cdot r + (S - x) \cdot r + (S - 2x) \cdot r + \dots + (S - x(n-1)) \cdot r + (S - x \cdot n) \cdot (1+r) = 755. \quad x \cdot n + S \cdot r + (S - x) \cdot r + (S - 2x) \cdot r + \dots + (S - x(n-1)) \cdot r + (S - x \cdot n) \cdot (1+r) = 755.$$

Подставив значения известных переменных и воспользовавшись формулой суммы арифметической прогрессии, получим уравнение

$$n \cdot x + 7 \cdot n - 0,005 \cdot n \cdot x(n-1) + 707 - 1,01 \cdot n \cdot x = 755.$$

$x \cdot n = 400$, поэтому наше уравнение примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 400 + 7 \cdot n - 0,005 \cdot 400(n-1) + 707 - 1,01 \cdot 400 &= 755 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 400 + 5n + 305 &= 755 \Leftrightarrow 5n = 50 \Leftrightarrow n = 10.
 \end{aligned}$$

Ответ: $n = 10$.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) По условию

$$\angle ACB + \angle BLA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

значит, четырёхугольник $LACB$ вписанный. Хорды AL и LB описанной около четырёхугольника $LACB$ окружности равны. Значит, равны между собой стягиваемые этими хордами дуги, а также опирающиеся на эти дуги вписанные углы ACL и LCB . Тогда углы ACL и LBC равны 45° .

По условию углы KCA и MCB равны 45° . Следовательно,

$$\angle KCL = \angle KCA + \angle ACL = 90^\circ,$$

$$\angle MCL = \angle MCB + \angle LCB = 90^\circ,$$

а значит, LC — высота треугольника KLM .

б) Для удобства обозначим отрезки буквами: BC — a , AC — b , AB — c и CL — d . Пусть P — точка пересечения CL и AB . Тогда по доказанному в пункте а) отрезок CP — биссектриса треугольника ABC . По свойству биссектрисы $AP:PB = AC:CB = b:a$, $AP+PB = AB = c$. Отсюда

$$AP = \frac{bc}{a+b} \text{ и } PB = \frac{ac}{a+b}.$$

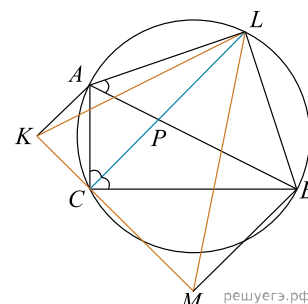
Поскольку углы ACL и PAL равны 45° , получаем, что треугольники ACL и PAL подобны по двум углам, тогда

$$\frac{AC}{PA} = \frac{CL}{AL}, \quad b : \frac{bc}{a+b} = d : \frac{c}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad d = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Площадь треугольника KLM равна половине произведения его высоты LC , обозначенной буквой d , на сторону, являющуюся основанием треугольника и равную

$$KM = KC + CM = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = d.$$

Следовательно, искомая площадь равна $\frac{d^2}{2} = 18$.



Ответ: 18.

№ 18.

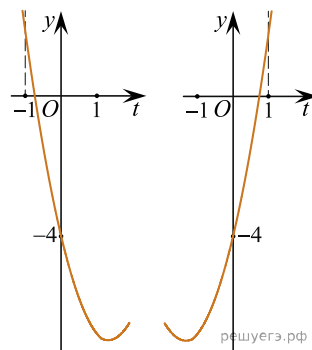
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Запишем исходное уравнение в виде

$$\cos^2 x + (3 + a) \cos x - 4 = 0.$$

Пусть $t = \cos x$, тогда исходное уравнение имеет хотя бы один корень, если уравнение $t^2 + (3 + a)t - 4 = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий отрезку $[-1; 1]$. Графиком функции $f(t) = t^2 + (3 + a)t - 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх, $f(0) = -4$.

Следовательно, уравнение $f(t) = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий отрезку $[-1; 1]$, либо при условии $f(-1) \geq 0$ (рис. 1) $1 - (3 + a) - 4 \geq 0$, откуда $a \leq -6$, либо при условии $f(1) \geq 0$ (рис. 2) $1 + (3 + a) - 4 \geq 0$, откуда $a \geq 0$.



Ответ: $(-\infty; -6] \cup [0; +\infty)$.

Примечание.

Для сравнения в задании [506078](#) приведены два неоптимальных решения этой задачи.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Для начала проверим, будет ли выполняться неравенство, если взять максимальное число двоек в сумме 500 монет:

$$1300 = 400 \cdot 2 + 100 \cdot 5 > \frac{400 \cdot 2 + 800 \cdot 5}{4} = 1200.$$

Далее заметим, что если в сумме 500 монет заменить двойку на пятерку, то сумма слева увеличится на 3, а сумма справа останется неизменной. Следовательно, раз при наибольшем количестве двоек неравенство верно, то и при

любом другом наборе монет условие задачи будет выполнено. Значит, N может равняться 400.

б) Приведем пример набора из 500 монет, при котором условие не выполняется. Возьмем только двойки. В этом случае:

$$1000 = 500 \cdot 2 < \frac{600 \cdot 2 + 600 \cdot 5}{4} = 1050.$$

Значит, N не может равняться 600.

в) Рассмотрим два случая: N больше 0 и не больше 500 и N больше 500 и меньше 1200. В обоих случаях будем брать наименьшую возможную сумму 500 монет, то есть брать наибольшее количество двоек. Запишем условие для первого случая:

$$\begin{aligned} 2N + 5 \cdot (500 - N) &\geq \frac{2N + 5(1200 - N)}{4} \Leftrightarrow 8N + 20 \cdot (500 - N) \geq 2N + 6000 - 5N \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 11N + 10000 - 20N - 6000 &\geq 0 \Leftrightarrow 9N \leq 4000 \Leftrightarrow N \leq 444. \quad 2N + 5 \cdot (500 - N) \geq \frac{2N + 5(1200 - N)}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8N + 20 \cdot (500 - N) \geq 2N + 6000 - 5N \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 11N + 10000 - 20N - 6000 &\geq 0 \Leftrightarrow 9N \leq 4000 \Leftrightarrow N \leq 444. \quad 2N + 5 \cdot (500 - N) \geq \frac{2N + 5(1200 - N)}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 8N + 20 \cdot (500 - N) \geq 2N + 6000 - 5N \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 11N + 10000 - 20N - 6000 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 9N \leq 4000 \Leftrightarrow N \leq 444. \end{aligned}$$

При $N = 444$ неравенство верно:

$$1168 = 2 \cdot 444 + 5 \cdot 56 > \frac{2 \cdot 444 + 5 \cdot 756}{4} = 1167.$$

Далее заметим, что при уменьшении N на 1 сумма слева увеличится на 3, а справа — на 0,75. Следовательно, все N от 1 до 444 подходят.

Рассмотрим второй случай. В этом случае наименьшая сумма из 500 монет будет состоять только из двоек:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 500 &\geq \frac{2N + 5(1200 - N)}{4} \Leftrightarrow 2N + 6000 - 5N \leq 4000 \Leftrightarrow 3N \geq 2000 \Leftrightarrow N \geq 667. \quad 2 \cdot 500 \geq \frac{2N + 5(1200 - N)}{4} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2N + 6000 - 5N &\leq 4000 \Leftrightarrow 3N \geq 2000 \Leftrightarrow N \geq 667. \quad 2 \cdot 500 \geq \frac{2N + 5(1200 - N)}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2N + 6000 - 5N \leq 4000 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3N \geq 2000 \Leftrightarrow N \geq 667. \end{aligned}$$

При $N = 667$ неравенство верно:

$$1000 = 2 \cdot 500 > \frac{2 \cdot 667 + 5 \cdot 533}{4} = 999,75.$$

Далее заметим, что при увеличении N на 1 сумма слева останется неизменной, а справа уменьшится. Следовательно, все N от 667 до 1199 подходят. Таким образом, количество подходящих N равно $444 + 1199 - 666 = 977$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 977.