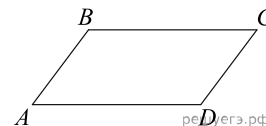


Вариант 175

№ 1.

Один угол параллелограмма больше другого на 70° . Найдите больший угол. Ответ дайте в градусах.

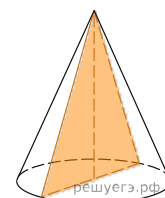


№ 2.

Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $2\sqrt{3}$ и 5, а угол между ними равен 150° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

№ 3.

Площадь основания конуса равна 16π , высота — 6. Найдите площадь осевого сечения конуса.



№ 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно два раза.

№ 5.

Чтобы поступить в институт на специальность «Лингвистика», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов— математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Коммерция», нужно набрать не менее 70 баллов по каждому из трёх предметов— математика, русский язык и обществознание.

Вероятность того, что абитуриент З. получит не менее 70 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку— 0,8, по иностранному языку — 0,7 и по обществознанию — 0,5.

Найдите вероятность того, что З. сможет поступить хотя бы на одну из двух упомянутых специальностей.

№ 6.

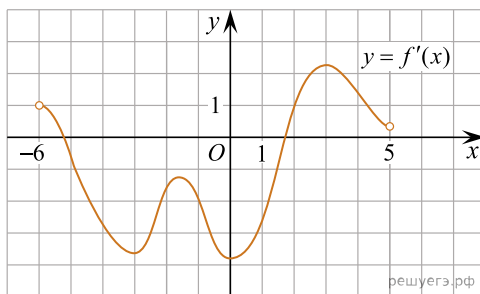
Решите уравнение $\log_x 32 = 5$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{12\sqrt[9]{m} \cdot \sqrt[18]{m}}{\sqrt[9]{m}}$ при $m > 0$.

№ 8.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[-6; 5]$. На рисунке изображен график её производной. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



№ 9.

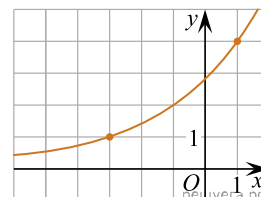
Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку (в Н·м), определяется формулой $M = NIBl^2 \sin \alpha$, где $I = 2$ А — сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл — значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м — размер рамки, $N = 1000$ — число витков провода в рамке, α — острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше $0,75$ Н·м?

№ 10.

Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите $f(-7)$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = \log_3(x^2 - 6x + 10) + 2$.

№ 13.

- Решите уравнение $\sqrt{\lg x - 1} \cdot (3 \cos x + \cos 2x + 2) = 0$.
- Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В основании правильной пирамиды $PABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Сечение пирамиды проходит через вершину B и середину ребра PD перпендикулярно этому ребру.

- а) Докажите, что угол наклона бокового ребра пирамиды к её основанию равен 60° .
б) Найдите площадь сечения пирамиды.
-

№ 15.

Решите неравенство: $2\log_9(4x^2 + 1) \geq \log_3(3x^2 + 4x + 1)$.

№ 16.

Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на телефон?

№ 17.

Дана трапеция $ABCD$, где $AB = BC = CD$, точка E лежит на плоскости так, что $BE \perp AD$ и $CE \perp BD$.

- а) Докажите, что углы AEB и BDA равны.
б) Найдите площадь трапеции, если $AB = 50$, а $\cos AEB = \frac{4}{5}$.
-

№ 18.

Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

№ 19.

- а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{100}$?
б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left| \frac{m^2}{n^2} - 2 \right| \leq \frac{1}{10000}$?

в) Найдите все возможные значения натурального числа n при каждом которых значение выражения $\left| \frac{n+10}{n} - \sqrt{2} \right|$ будет наименьшим.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27807	125
2	649909	-15

3	324453	24
4	283467	0,375
5	320199	0,408
6	525399	2
7	26825	12
8	551737	8
9	27999	30
10	99577	60
11	509101	0,25
12	245179	2

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

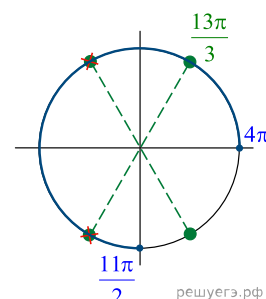
Решение. а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x - 3 = 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

$$(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x > 0$$

$$(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \cos x > 0$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$. Получим $\frac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{13\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3

Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

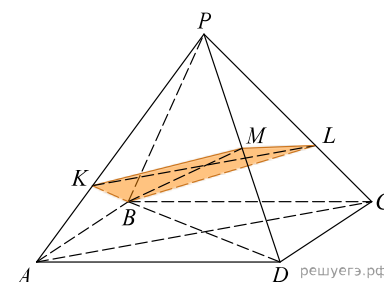
Решение. а) Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость. Поскольку заданная четырёхугольная пирамида правильная, ее вершина проецируется в точку пересечения диагоналей лежащего в основании квадрата. Поэтому проекцией прямой PB на плоскость основания является прямая BD . Найдем угол PBD .

Пусть M — середина PD . Прямая BM лежит в плоскости сечения, перпендикулярного PD , поэтому отрезки BM и PD перпендикулярны, то есть в треугольнике BPD медиана BM является высотой. Значит, $BP = BD$, но, поскольку $PB = PD$, треугольник BPD равносторонний, а поэтому $\angle PBD = 60^\circ$.

б) Из доказанного следует, что $PA = PB = 6\sqrt{2}$ и $BM = 3\sqrt{6}$ как высота равностороннего треугольника BPD . Применяя теорему косинусов к треугольнику APD , получаем $36 = 144(1 - \cos \angle APD)$, откуда $\cos \angle APD = \frac{3}{4}$. Пусть $BKML$ — указанное сечение (точка K лежит на ребре PA , а точка L — на ребре PC). Отрезки KM и PD перпендикулярны, поэтому $PK = \frac{PM}{\cos \angle APD} = 4\sqrt{2}$. Аналогично находим $PL = 4\sqrt{2}$. Значит, $PK = PL$, а потому треугольник PKL подобен треугольнику PAC . Поэтому $LK = 4\sqrt{2}$. Кроме того, прямые KL и AC параллельны, а прямые AC и BM перпендикулярны, поскольку AC перпендикулярна плоскости BPD , а BM лежит в этой плоскости. Значит, по теореме о трех перпендикулярах, прямые KL и BM перпендикулярны. Поэтому искомая площадь

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ: $12\sqrt{3}$.

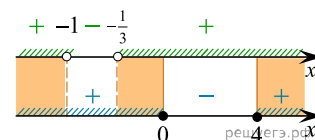


№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Используя формулу $\log_{a^2} b = \frac{1}{2} \log_a b$, получаем:

$$\begin{aligned}
2\log_9(4x^2+1) &\geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow \log_3(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow \\
2\log_9(4x^2+1) &\geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \log_3(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+1 > 0, \\ 3x^2+4x+1 > 0, \\ 4x^2+1 \geq 3x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1) > 0, \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -\frac{1}{3} < x \leq 0, \\ x \geq 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+1 > 0, \\ 3x^2+4x+1 > 0, \\ 4x^2+1 \geq 3x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1) > 0, \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -\frac{1}{3} < x \leq 0, \\ x \geq 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right] \cup [4; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. При удорожании коммунальных услуг на 100%, общая сумма увеличилась бы на 70%. А если бы электричество подорожало на 100%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 20%. Значит, в общем платеже на коммунальные услуги приходится 70%, а на электричество — 20%. Поэтому на телефон приходится оставшиеся 10%.

Приведём другие решения.

1. Алгебраический подход.

Пусть плата за коммунальные услуги и электричество составляет x руб. в месяц, а за телефон — y руб. Если плата и за коммунальные услуги, и за электричество увеличится на 50%, эта часть оплаты составит $1,5x$ руб., что повлечет увеличение общей суммы платежа на $35\% + 10\% = 45\%$. Тогда

$$\begin{aligned}
1,5x + y &= 1,45 \cdot (x + y) \Leftrightarrow 1,5x + y = 1,45x + 1,45y \Leftrightarrow 0,05x = 0,45y \Leftrightarrow x = 9y. \quad 1,5x + y = 1,45 \cdot (x + y) \Leftrightarrow 1,5x + y = 1,45x + 1,45y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 0,05x = 0,45y \Leftrightarrow x = 9y. \quad 1,5x + y = 1,45 \cdot (x + y) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1,5x + y = 1,45x + 1,45y \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 0,05x = 0,45y \Leftrightarrow x = 9y.
\end{aligned}$$

Следовательно, $x + y = 10y$, откуда $\frac{y}{x+y} = \frac{1}{10}$. Это означает, что на телефон приходится $\frac{1}{10}$ часть от общей суммы платежа, а это составляет 10%.

2. Арифметика помогает алгебре.

Если все три вида предоставляемых услуг подорожают на 50%, то общая сумма платежа увеличится на 50%. Но из-за того, что платеж за услуги телефонии останется неизменным, общая сумма платежа после подорожания по остальным двум видам услуг будет на $50\% - 35\% - 10\% = 5\%$ меньше. Эти 5% — доля телефонии в числе 50% оплаты за все услуги. Тем самым, доля оплаты за телефон составляет $5/50$ или 10% от общей суммы.

3. Система линейных уравнений.

Обозначим за x долю общей оплаты, приходящейся на коммунальные услуги, за y — на электричество и за z — на телефон. Составим систему уравнений. Сумма всех оплат $x + y + z = 1$ — первое уравнение. Увеличиваем в 1,5 раза коммунальные услуги: $1,5x + y + z = 1,35$ — второе уравнение. Увеличиваем в 1,5 раза оплату за электричество:

$x + 1,5y + z = 1,1$ — третье уравнение. Затем вычитаем из третьего уравнения первое, получаем $0,5y = 0,1$, отсюда $y = 0,2$. Затем вычитаем из второго уравнения первое, получаем $0,5x = 0,35$, отсюда $x = 0,7$. Подставляем в первое уравнение: $0,7 + 0,2 + z = 1$, отсюда $z = 0,1$ или 10%.

Ответ: 10%.

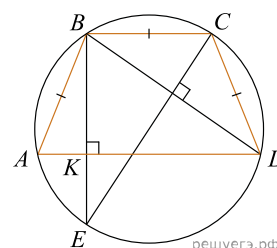
№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Докажем, что точка E лежит на окружности, описанной вокруг трапеции $ABCD$. В самом деле, углы BEC и BDA равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами, а углы BDA и BDC равны как опирающиеся на равные дуги. Следовательно, $\angle BEC = \angle BDC$, а потому и точки B, E, D, C лежат на одной окружности. Тогда углы BEA и BDA равны как опирающиеся на одну дугу.

б) По доказанному ранее углы AEB , BDA , BDC равны, откуда $\angle A = \angle D = 2\angle AEB$,

$$\cos \angle A = \cos 2\angle AEB = 2\cos^2 \angle AEB - 1 = \frac{7}{25}.$$



Пусть K — точка пересечения AD и BE , тогда из прямоугольного треугольника ABK получаем $AK = 50 \cdot \frac{7}{25} = 14$ и

$$BK = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48.$$

Трапеция $ABCD$ — равнобедренная, а BK — её высота, поэтому средняя линия трапеции равна $BC + AK = 64$.
Окончательно получаем:

$$S_{ABCD} = 64 \cdot 48 = 3072.$$

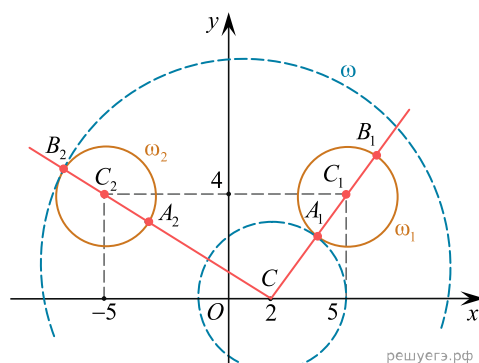
Ответ: 3072.

№ 18.

Критерии оценивания ответа на задание С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4

С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но – или в ответ включены так же одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обоснованно.	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра.	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения трёх окружностей; – или двух квадратных уравнений с параметром.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальное количество баллов	4

Решение. Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$ задает окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5, 4)$ радиуса 2, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5, 4)$ того же радиуса (см. рис.).



При положительных значениях параметра a уравнение $(x - 2)^2 + y^2 = a^2$ задаст окружность ω с центром в точке $C(2, 0)$ радиуса a . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a , при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2 .

Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1 , где A_1 лежит между C и C_1 .

Так как $CC_1 = \sqrt{(5-2)^2 + 4^2} = 5$, то $CA_1 = 5 - 2 = 3$, $CB_1 = 5 + 2 = 7$.

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω и ω_1 не пересекаются. При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω и ω_1 имеют две общие точки. При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω и ω_1 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2 , где A_2 лежит между точками C и C_2 . Так как $CC_2 = \sqrt{(-5-2)^2 + 4^2} = \sqrt{65}$, то $CA_2 = \sqrt{65} - 2$, $CB_2 = \sqrt{65} + 2$.

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω и ω_2 не пересекаются. При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω и ω_2 имеют две общие точки. При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω и ω_2 касаются.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_1 < CA_2 < CB_1 < CB_2$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a = 3$ и $a = \sqrt{65} + 2$.

Ответ: 3, $\sqrt{65} + 2$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2

Верно получен один из следующий результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Поскольку $1,4 < \sqrt{2} < 1,42$, число $\sqrt{2}$ лежит в отрезке $\left[\frac{28}{20}; \frac{71}{50}\right]$, длина которого равна $\frac{71}{50} - \frac{28}{20} = \frac{1}{50}$. Следовательно, расстояние от $\sqrt{2}$ до какого-то из концов отрезка не больше половины его длины. Поэтому числа m и n суть числа 28 и 20 или числа 71 и 50 соответственно. Таким образом, искомые числа существуют.

б) Докажем, что таких m и n не существует. Доказательство проведём от противного. Пусть существуют двузначные числа m и n , для которых выполняется неравенство $\left|\frac{m^2}{n^2} - 2\right| \leq \frac{1}{10000}$. Тогда

$$\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{100^2} \leq 2 \leq \frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{100^2}.$$

По условию $n < 100$, поэтому из последнего неравенства получаем

$$\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{n^2} < 2 < \frac{m^2}{n^2} + \frac{1}{n^2},$$

откуда $m^2 - 1 < 2n^2 < m^2 + 1$. Следовательно, $2n^2 = m^2$. Противоречие.

в) С увеличением n значение выражения $\frac{n+10}{n} = 1 + \frac{10}{n}$ уменьшается. Поскольку при $n = 24$ значение выражения $1 + \frac{10}{n}$ больше $\sqrt{2}$, при $n = 25$ — меньше $\sqrt{2}$, и значение $\left|\frac{n+10}{n} - \sqrt{2}\right|$ равно расстоянию от $\frac{n+10}{n}$ до $\sqrt{2}$, наименьшее значение это выражение принимает при $n = 24$ или $n = 25$.

При $n = 24$ получаем:

$$\left|\frac{n+10}{n} - \sqrt{2}\right| = \frac{34}{24} - \sqrt{2},$$

а при $n = 25$ получаем

$$\sqrt{2} - \frac{n+10}{n} = \sqrt{2} - \frac{35}{25}.$$

Сравнивая эти значения, видим, что наименьшее значение выражение $\left|\frac{n+10}{n} - \sqrt{2}\right|$ принимает при $n = 24$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 24.

Примечание к пункту а).

Выше было получено, что удовлетворяющие условию числа существуют. Искать их не требовалось, но можно и найти. Для этого заметим, что $\sqrt{2}$ лежит правее точки $1,41$ — середины отрезка $\left[\frac{28}{20}; \frac{71}{50}\right]$. Поэтому $\left|\frac{71}{50} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{100}$. Следовательно, примером являются числа 71 и 50.

Приведем другое решение пункта а).

Заметим, что неравенство $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{100}$ равносильно двойному неравенству

$$\sqrt{2} - \frac{1}{100} \leq \frac{m}{n} \leq \sqrt{2} + \frac{1}{100}.$$

При этом

$$\sqrt{2} - \frac{1}{100} < 1,42 - \frac{1}{100} = 1,41,$$

$$1,42 = 1,41 + \frac{1}{100} < \sqrt{2} + \frac{1}{100},$$

а значит, из неравенства

$$1,41 < \frac{m}{n} < 1,42 \Leftrightarrow_{n \in \mathbb{N}} 1,41n < m < 1,42n$$

следует, что $\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{100}$. Пусть, например, $n = 65$, тогда $91,65 < m < 92,3$. Следовательно, двузначные числа $m = 92$ и $n = 65$ удовлетворяют исходному неравенству.

Приведем решение Евгения Обухова (Москва).

а) Требуется найти хорошее приближение числа $\sqrt{2}$ рациональной дробью, знаменатель и числитель которой — двузначные числа. Искать его следует среди подходящих дробей. Заметим, что представление числа $\sqrt{2}$ в виде бесконечной цепной дроби есть

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Знаменатель и числитель дроби являются двузначными числами, если

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{17}{12}.$$

Такого приближения хватит ввиду следствия из теоремы Дирихле о приближениях (подходящие дроби «хорошо приближают»): $\left| \frac{p_n}{q_n} - \alpha \right| < \frac{1}{q_n^2}$:

$$\left| \frac{17}{12} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{12^2} < \frac{1}{100}.$$

б) Предположим, что такие m и n существуют. Тогда с помощью формулы разности квадратов преобразуем данное в условии неравенство в привычный нам вид:

$$\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{10^4 \left| \frac{m}{n} + \sqrt{2} \right|} < \frac{1}{10^4},$$

то есть дробь $\frac{m}{n}$ обязана быть очень близкой к $\sqrt{2}$, поэтому оценку можно улучшить вдвое:

$$\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{10^4 \left| \frac{m}{n} + \sqrt{2} \right|} < \frac{1}{10^4 \cdot 2} < \frac{1}{2n^2}.$$

Здесь было учтено, что $n < 100$. Последнее неравенство означает, что дробь $\frac{m}{n}$ — подходящая дробь числа $\sqrt{2}$ по теореме о том, что из неравенства $\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{2q^2}$ следует, что несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является подходящей дробью числа α . Подходящая дробь с большим номером приближает лучше, чем подходящая дробь с меньшим номером, поэтому в нашем случае (числитель и знаменатель — двузначные числа) лучше всего приближает дробь:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{99}{70}.$$

Осталось убедиться, что неравенство $\left| \frac{99}{70} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{10^4 \cdot 2}$ не выполняется, что приводит к противоречию. Приближим $\sqrt{2}$ более хорошей подходящей дробью. Скажем, дроби $\frac{577}{408}$ хватит, поскольку

$$\left| \frac{577}{408} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{408^2} < \frac{1}{(4 \cdot 10^2)^2} < \frac{1}{10^5}.$$

Разделив в столбик, получим:

$$\frac{577}{408} = 1,414215\dots,$$

$$\frac{99}{70} = 1,414285\dots,$$

то есть довольно значимое различие на пятом знаке после запятой: $\left| \frac{99}{70} - \frac{577}{408} \right| > \frac{6}{10^5}$. Из неравенства треугольника:

$$\left| \frac{99}{70} - \sqrt{2} \right| > \left| \frac{99}{70} - \frac{577}{408} \right| - \left| \frac{577}{408} - \sqrt{2} \right| > \frac{6}{10^5} - \frac{1}{10^5} = \frac{5}{10^5} = \frac{1}{10^4 \cdot 2},$$

что и требовалось для получения противоречия.

в) Требуется минимизировать выражение $\left| \frac{10}{n} - (\sqrt{2} - 1) \right|$. Вновь рассмотрим разложение приближаемого числа в цепную дробь:

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Заметим, что уже одна из первых дробей нам подходит:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{5}{12}.$$

Имеем $\frac{5}{12} = \frac{10}{24}$, это как раз нужный нам числитель. Заметим, что

$$\left| \frac{10}{24} - (\sqrt{2} - 1) \right| = \left| \frac{5}{12} - (\sqrt{2} - 1) \right| < \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144},$$

то есть дробь $\frac{10}{24}$ находится весьма близко к числу $\sqrt{2} - 1$. Оставшиеся наиболее близкие дроби с числителем 10 — $\frac{10}{23}$ и $\frac{10}{25}$ — находятся от числа $\sqrt{2} - 1$ дальше. В частности, это можно проверить непосредственно: $\frac{10}{24} - \frac{10}{25} = \frac{1}{60}$, и поскольку $\frac{1}{60} > \frac{1}{144} \cdot 2$, то дробь $\frac{10}{25}$ выпадет из окрестности $\left((\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{144}; (\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{144} \right)$, в которой дробь $\frac{10}{24}$, в свою очередь, находится. Аналогично с дробью $\frac{10}{23}$, соответствующая разность $\frac{10}{23} - \frac{10}{24}$ ещё больше.
