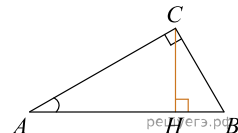


Вариант 176

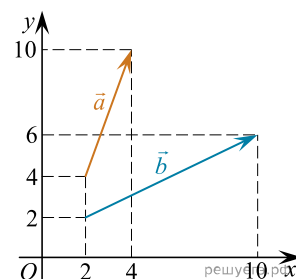
№ 1.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , высота CH равна 8, $BH = 4$. Найдите $\operatorname{tg} A$.



№ 2.

Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ответ дайте в градусах.



№ 3.

Во сколько раз увеличится площадь поверхности пирамиды, если все ее ребра увеличить в 2 раза?

№ 4.

Вася, Петя, Коля и Лёша бросили жребий— кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должен будет Петя.

№ 5.

Семена подсолнечника расфасовывают в пакеты по 1 кг. Вероятность того, что в случайно выбранном пакете масса семян окажется меньше, чем 1050 г, равна 0,97. Вероятность того, что масса окажется больше, чем 970 г, равна 0,94. Найдите вероятность того, что масса семян в этом пакете окажется в интервале от 970 г до 1050 г.

№ 6.

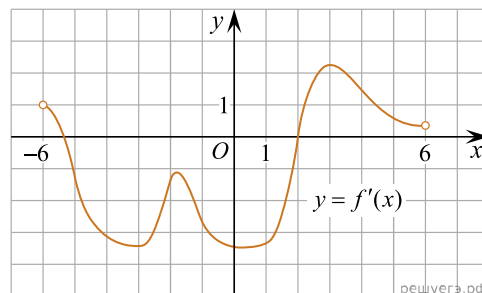
Найдите корень уравнения $\sqrt{-4-5x} = 4$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\sqrt{12} \cos^2 \frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}$.

№ 8.

На рисунке изображен график $y = f'(x)$ — производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

**№ 9.**

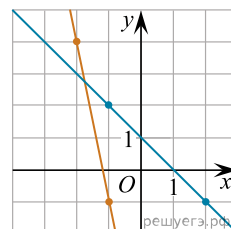
Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 5000 \text{ км/ч}^2$. Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 100 км/ч .

№ 10.

На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

№ 11.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.

**№ 12.**

Найдите точку минимума функции $y = (0,5 - x) \cos x + \sin x$, принадлежащую промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{2^{\sin 2x} - 2^{\sqrt{3} \cos x}}{\sqrt{\lg x - 1}} = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ провели сечение плоскостью, проходящей через сторону основания AB перпендикулярно ребру SC .

а) Докажите, что площадь этого сечения относится к площади основания так же, как высота пирамиды относится к её боковому ребру.

б) Найдите площадь сечения если боковое ребро $SA = 5$, а сторона основания $AB = 4$.

№ 15.

Решите неравенство: $6(4x+3)(x^2-x+9) < 9(4x+3)^2 + (x^2-x+9)^2$.

№ 16.

В июле 2023 года планируется взять кредит на 10 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь с 2024 по 2028 год долг возрастает на 18% по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2029 по 2033 год долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2033 года долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1470 тысяч рублей?

№ 17.

В трапеции с основаниями $BC=6$ и $AD=8$ на диагонали AC отмечена точка O такая, что $CO : OA = 2 : 3$. Прямая BO пересекает отрезок CD в точке E .

а) Докажите, что $CE : DE = 6 : 1$.

б) Найдите отношение площади треугольника COE к площади трапеции $ABCD$.

№ 18.

Найдите все ненулевые значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |a|^y - \frac{5(y+5)}{a^4} = \frac{x^2 - 8x}{4a^4} \\ \sqrt{2x+y} = 0,5x \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

№ 19.

Аристарх написал на заборе квадратный трёхчлен вида $x^2 + 10x + 20$. После этого каждый проходящий мимо человек по очереди делал следующее: увеличивал или уменьшал на 1 либо коэффициент при x , либо свободный член (но не оба сразу). Рассматриваются все возможные последовательности таких изменений, приводящие от начального к конечному трёхчлену.

а) Существует ли такая последовательность получившихся многочленов, в которой ни разу не появился многочлен с целыми корнями, если в итоге на заборе оказался трёхчлен $x^2 + 12x + 18$?

б) Существует ли такая последовательность получившихся многочленов, в которой ни разу не появился многочлен с целыми корнями, если в итоге на заборе оказался трёхчлен $x^2 + 20x + 10$?

в) Многочлен $x^2 + 15x + 5$ был получен за минимальное количество шагов. Какое наибольшее количество многочленов с целыми корнями можно при этом получить?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27344	0,5
2	27741	45
3	27172	4
4	320169	0,25
5	680565	0,91
6	501034	-4
7	245171	-1,5
8	6429	14
9	27987	1
10	26595	10
11	509241	2,75
12	77493	0,5

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Из основного тригонометрического тождества находим, что $\sqrt{1 - \sin^2 x} = |\cos x|$. Тогда уравнение принимает вид

$$49 - |\cos x| - 49^{\cos x} = -\frac{48}{7}.$$

При $\cos x < 0$ получаем уравнение $49^{\cos x} - 49^{\cos x} = -\frac{48}{7}$, оно не имеет решений. При $\cos x \geq 0$ получаем уравнение $49^{-\cos x} - 49^{\cos x} = -\frac{48}{7}$. Пусть $y = 49^{\cos x}$, тогда

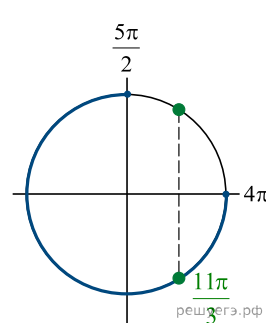
$$\frac{1}{y} - y = -\frac{48}{7} \Leftrightarrow \frac{7y^2 - 48y - 7}{7y} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{7}, \\ y = 7. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной, получим: $49^{\cos x} = -\frac{1}{7}$ или $49^{\cos x} = 7$. Первое из этих уравнений не имеет решений, для второго уравнения находим:

$$49^{\cos x} = 7 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Получим число $\frac{11\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{11\pi}{3}$.



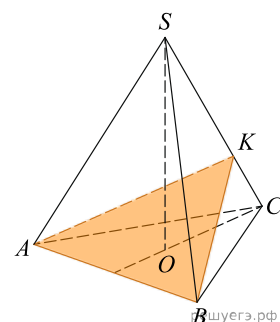
№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) В треугольнике BCS проведём высоту BK , тогда искомое сечение — треугольник ABK . Пусть Q — площадь треугольника ABK . Сечение из условия разбивает пирамиду на тетраэдры $CAKB$ и $SAKB$. Их суммарный объём

$$\frac{1}{3} \cdot Q \cdot SK + \frac{1}{3} \cdot Q \cdot CK = \frac{1}{3} \cdot Q \cdot SC$$

равен объёму пирамиды $SABC$. С другой стороны $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC}$. Тогда $Q \cdot SC = SO \cdot S_{ABC} \Leftrightarrow Q/S_{ABC} = SO/SC$.



б) Пусть SO — высота пирамиды. В треугольнике SCO имеем:

$$CO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{25 - \frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{59}}{\sqrt{3}}$$

Вычислим объём пирамиды $SABC$:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \frac{\sqrt{59}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{59}}{3}$$

Приравнивая два найденных значения для объёма, получаем

$$Q = \frac{4\sqrt{59}}{5}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{59}}{5}$.

Примечание Дмитрия Гуцина.

По сути, решение основано на вычислении объема двумя способами: $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн}}h$ и $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3}S_{\text{перп}}l$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Обозначим $a = 4x + 3$, $b = x^2 - x + 9$ и применим формулу квадрата разности. Получим:

$$6ab < 9a^2 + b^2 \Leftrightarrow 9a^2 - 6ab + b^2 > 0 \Leftrightarrow (3a - b)^2 > 0 \Leftrightarrow 3a - b \neq 0 \Leftrightarrow 3a \neq b. \quad 6ab < 9a^2 + b^2 \Leftrightarrow 9a^2 - 6ab + b^2 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3a - b)^2 > 0 \Leftrightarrow 3a - b \neq 0 \Leftrightarrow 3a \neq b.$$

Возвращаясь к исходной переменной, находим:

$$3(4x + 3) \neq x^2 - x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 13x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ x \neq 13. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 13) \cup (13; +\infty)$.

Примечание.

В последнем шаге решения должна быть именно система условий, а не совокупность.

Это же решение можно записать несколько иначе.

Преобразуем неравенство, выделив полный квадрат:

$$6(4x + 3)(x^2 - x + 9) < 9(4x + 3)^2 + (x^2 - x + 9)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (3 \cdot (4x + 3))^2 - 2 \cdot 3 \cdot (4x + 3)(x^2 - x + 9) + (x^2 - x + 9)^2 > 0 \Leftrightarrow ((3 \cdot (4x + 3)) - (x^2 - x + 9))^2 > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (13x - x^2)^2 > 0 \Leftrightarrow 13x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x < 13, \quad 6(4x + 3)(x^2 - x + 9) < 9(4x + 3)^2 + (x^2 - x + 9)^2 \Leftrightarrow \\ x > 13. \end{cases} \\ \Leftrightarrow (3 \cdot (4x + 3))^2 - 2 \cdot 3 \cdot (4x + 3)(x^2 - x + 9) + (x^2 - x + 9)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow ((3 \cdot (4x+3) - (x^2 - x + 9))^2 > 0 \Leftrightarrow (13x - x^2)^2 > 0 \Leftrightarrow 13x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x < 13, 6(4x+3)(x^2 - x + 9) < 9(4x+3)^2 + (x^2 - x + 9)^2 \Leftrightarrow \\ x > 13. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (3 \cdot (4x+3))^2 - 2 \cdot 3 \cdot (4x+3)(x^2 - x + 9) + (x^2 - x + 9)^2 > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((3 \cdot (4x+3) - (x^2 - x + 9))^2 > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (13x - x^2)^2 > 0 \Leftrightarrow 13x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x < 13, 6(4x+3)(x^2 - x + 9) < 9(4x+3)^2 + (x^2 - x + 9)^2 \Leftrightarrow \\ x > 13. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow (3 \cdot (4x+3))^2 - 2 \cdot 3 \cdot (4x+3)(x^2 - x + 9) + (x^2 - x + 9)^2 > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((3 \cdot (4x+3) - (x^2 - x + 9))^2 > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (13x - x^2)^2 > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 13x - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x < 13, \\ x > 13. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 13) \cup (13; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть S тысяч рублей — сумма кредита. Сумма ежегодно должна уменьшаться на одну и ту же величину, поэтому каждый год она уменьшается на $\frac{S}{10}$ тысяч рублей. Каждая выплата состоит из суммы, на которую уменьшается долг, и суммы начисленных процентов. Составим таблицу.

Год	Начисленный процент в январе (тыс. руб.)	Выплата (тыс. руб.)	Сумма долга в июле (тыс. руб.)
2023			S
2024	$0,18 \cdot S$	$\frac{S}{10} + 0,18 \cdot S$	$\frac{9S}{10}$
2025	$0,18 \cdot \frac{9S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,18 \cdot \frac{9S}{10}$	$\frac{8S}{10}$
2026	$0,18 \cdot \frac{8S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,18 \cdot \frac{8S}{10}$	$\frac{7S}{10}$
2027	$0,18 \cdot \frac{7S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,18 \cdot \frac{7S}{10}$	$\frac{6S}{10}$
2028	$0,18 \cdot \frac{6S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,18 \cdot \frac{6S}{10}$	$\frac{5S}{10}$
2029	$0,16 \cdot \frac{5S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,16 \cdot \frac{5S}{10}$	$\frac{4S}{10}$
2030	$0,16 \cdot \frac{4S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,16 \cdot \frac{4S}{10}$	$\frac{3S}{10}$
2031	$0,16 \cdot \frac{3S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,16 \cdot \frac{3S}{10}$	$\frac{2S}{10}$
2032	$0,16 \cdot \frac{2S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,16 \cdot \frac{2S}{10}$	$\frac{S}{10}$
2033	$0,16 \cdot \frac{S}{10}$	$\frac{S}{10} + 0,16 \cdot \frac{S}{10}$	0

Общая сумма выплат состоит из суммы кредита (S тысяч рублей) и суммы начисленных процентов за каждый год и по условию равна 1470 тысяч рублей:

$$\begin{aligned}
& S + 0,18 \cdot S \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} + \frac{7}{10} + \frac{6}{10}\right) + 0,16 \cdot S \cdot \left(\frac{5}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10}\right) = \\
& = S + 0,18 \cdot S \cdot \frac{16}{10} \cdot \frac{5}{2} + 0,16 \cdot S \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{2} = S + 0,72S + 0,24S = 1,96S = 1470, \\
& S + 0,18 \cdot S \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} + \frac{7}{10} + \frac{6}{10}\right) + 0,16 \cdot S \cdot \left(\frac{5}{10} + \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{10}\right) = \\
& = S + 0,18 \cdot S \cdot \frac{16}{10} \cdot \frac{5}{2} + 0,16 \cdot S \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{2} = \\
& = S + 0,72S + 0,24S = 1,96S = 1470,
\end{aligned}$$

следовательно,

$$S = \frac{1470}{1,96} = 750 \text{ тысяч рублей.}$$

Ответ: 750 тысяч рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть прямые BO и AD пересекаются в точке F (см.рис.). Пусть также $\frac{CE}{DE} = x$. Тогда из подобия треугольников BEC и FED по двум углам получаем, что $\frac{DF}{CB} = \frac{DE}{CE}$, то есть $DF = \frac{6}{x}$. По теореме Менелая для треугольника ACD и секущей OE находим:

$$\frac{AO}{OC} \cdot \frac{CE}{ED} \cdot \frac{DF}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \cdot x \cdot \frac{\frac{6}{x}}{\frac{6}{x} + 8} = 1 \Leftrightarrow 9 = \frac{6}{x} + 8 \Leftrightarrow \frac{6}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 6,$$

откуда и следует требуемое.

б) Пусть высота трапеции равна h , тогда:

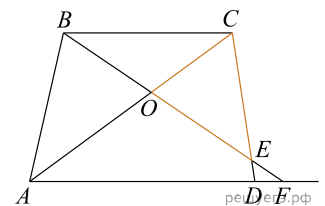
$$S_{ABCD} = \frac{6+8}{2} \cdot h = 7h,$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot h = 4h.$$

Отношение площадей двух треугольников с равным общим углом равно отношению произведений сторон, которые заключают этот угол в каждом из треугольников, поэтому

$$\frac{S_{COE}}{S_{ACD}} = \frac{CO \cdot CE}{CA \cdot CD} = \frac{2}{2+3} \cdot \frac{6}{6+1} = \frac{12}{35}.$$

Итак,



$$\frac{S_{COE}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{COE}}{S_{ACD}} \cdot \frac{S_{ACD}}{S_{ABCD}} = \frac{12}{35} \cdot \frac{4h}{7h} = \frac{48}{245}.$$

Ответ: б) $\frac{48}{245}$.

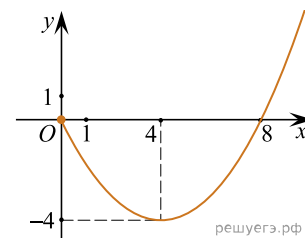
№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |a|^y - \frac{5(y+5)}{a^4} = \frac{x^2-8x}{4a^4}, \\ \sqrt{2x+y} = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^y - \frac{5(y+5)}{a^4} = \frac{y}{a^4}, \\ y = \frac{x^2}{4} - 2x, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^{y+4} = 6y+25, \\ y = \frac{x^2-8x}{4}, \\ x \geq 0, a \neq 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a|^y - \frac{5(y+5)}{a^4} = \frac{y}{a^4}, \\ y = \frac{x^2}{4} - 2x, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^{y+4} = 6y+25, \\ y = \frac{x^2-8x}{4}, \\ x \geq 0, a \neq 0. \end{cases}$$



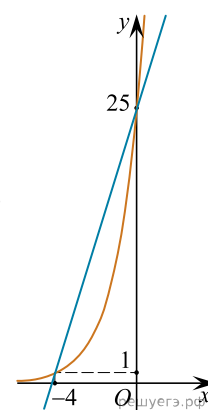
Построим график функции $y = \frac{x^2-8x}{4}$ при $x \geq 0$ (см.рис.). Для того, чтобы система имела ровно три решения, необходимо, чтобы уравнение

$$|a|^{y+4} = 6y+25 \quad (*)$$

имело одно решение при $y \in (-4; 0]$ и одно решение при $y \in \{-4\} \cup (0; +\infty)$. Заметим, что $y = -4$ является решением при всех $a \neq 0$. Значит, нужно найти такие значения a , для которых уравнение имеет один корень на $(-4; 0]$ и не имеет корней при $y > 0$.

Если $0 < |a| < 1$, то уравнение(*) имеет единственное решение $t = 0$, поскольку его левая часть убывает, а правая — возрастает. При $a = 1$ уравнение(*) также имеет единственное решение. Следовательно, $|a| > 1$, а тогда функция $f(y) = a^{y+4}$ возрастает и пересекается с прямой $p(y) = 6y+25$ на полуинтервале $(-4; 0]$ тогда и только тогда, когда одновременно $f'(-4) < 6$ и $f(0) \geq 25$. Имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} |a|^0 \ln |a| < 6, \\ |a|^4 \geq 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln |a| < 6, \\ |a| \geq \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < e^6, \\ |a| \geq \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^6 < a \leq -\sqrt{5}, \\ \sqrt{5} \leq a < e^6. \end{cases} \\ \begin{cases} |a|^0 \ln |a| < 6, \\ |a|^4 \geq 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ln |a| < 6, \\ |a| \geq \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| < e^6, \\ |a| \geq \sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -e^6 < a \leq -\sqrt{5}, \\ \sqrt{5} \leq a < e^6. \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $(-e^6; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; e^6)$.

Приведем решение, где множество значений функции выясняется при помощи производной и пределов.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |a|^y - \frac{5(y+5)}{a^4} = \frac{x^2-8x}{4a^4}, \\ \sqrt{2x+y} = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^y - \frac{5(y+5)}{a^4} = \frac{y}{a^4}, \\ y = \frac{x^2}{4} - 2x, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^{y+4} = 6y+25, \\ y = \frac{x^2-8x}{4}, \\ x \geq 0, a \neq 0. \end{cases} \begin{cases} |a|^y - \frac{5(y+5)}{a^4} = \frac{x^2-8x}{4a^4}, \\ \sqrt{2x+y} = \frac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a|^y - \frac{5(y+5)}{a^4} = \frac{y}{a^4}, \\ y = \frac{x^2}{4} - 2x, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|^{y+4} = 6y+25, \\ y = \frac{x^2-8x}{4}, \\ x \geq 0, a \neq 0. \end{cases}$$

Построим график функции $y = \frac{x^2-8x}{4}$ при $x \geq 0$ (см.рис.). Для того, чтобы система имела ровно три решения, необходимо, чтобы уравнение $|a|^{y+4} = 6y+25$ имело одно решение при $y \in (-4; 0]$ и одно решение при $y \in \{-4\} \cup (0; +\infty)$. Заметим, что $y = -4$ является решением при всех $a \neq 0$. Значит, нужно найти такие значения a , для которых уравнение имеет один корень на $(-4; 0]$ и не имеет корней при $y > 0$.

Запишем это уравнение в виде

$$|a| = (6y+25)^{\frac{1}{y+4}}.$$

Найдем множество значений функции

$$f(y) = (6y+25)^{\frac{1}{y+4}} = e^{\frac{\ln(6y+25)}{y+4}}.$$

Найдем производную:

$$\begin{aligned} f'(y) &= \left(e^{\frac{\ln(6y+25)}{y+4}} \right)' = e^{\frac{\ln(6y+25)}{y+4}} \cdot \left(\frac{6}{6y+25} \cdot (y+4) - \ln(6y+25) \right) \cdot \frac{1}{(y+4)^2}. \\ f'(y) &= \left(e^{\frac{\ln(6y+25)}{y+4}} \right)' = e^{\frac{\ln(6y+25)}{y+4}} \cdot \left(\frac{6}{6y+25} \cdot (y+4) - \ln(6y+25) \right) \cdot \frac{1}{(y+4)^2}. \end{aligned}$$

Производная обращается в нуль, если $\frac{6y+24}{6y+25} - \ln(6y+25) = 0$.

Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{6y+25} + \ln(6y+25) = 1$, и рассмотрим уравнение $g(y) = 1$ для функции

$$g(y) = \frac{1}{6y+25} + \ln(6y+25)$$

при $y > -4$. Найдем производную:

$$g'(y) = -\frac{6}{(6y+25)^2} + \frac{6}{6y+25} = \frac{6}{6y+25} \cdot \left(1 - \frac{1}{6y+25} \right).$$

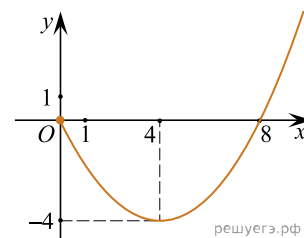
Найденная производная положительна при $y > -4$, а потому функция $g(y)$ возрастает, а уравнение $g(y) = 1$ не имеет решений. Следовательно, производная $f'(y)$ сохраняет знак при $y > -4$. Взяв в качестве пробной точки $y = 0$, заключаем, что $f'(y) < 0$. Таким образом, показано, что функция $f(y)$ убывает на $(-4; \infty)$. Найдем пределы:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln(6y+25)}{y+4}} = e^{\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln(6y+25)}{y+4}} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -4+0} f(y) &= \lim_{y \rightarrow -4+0} (6(y+4)+1)^{\frac{1}{y+4}} = \lim_{y \rightarrow -4+0} (6(y+4)+1)^{\frac{6}{6(y+4)}} = e^6. \\ \lim_{y \rightarrow -4+0} f(y) &= \lim_{y \rightarrow -4+0} (6(y+4)+1)^{\frac{1}{y+4}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow -4+0} (6(y+4)+1)^{\frac{6}{6(y+4)}} = e^6. \end{aligned}$$

Необходимо было найти такие значения a , для которых уравнение $|a| = (6y+25)^{\frac{1}{y+4}}$ имеет один корень на $(-4; 0]$ и не имеет корней на луче $(0; \infty)$. Множество значений $E(f)$ функции $f(y)$ на полуинтервале $(-4; 0]$ есть $E(f) = [f(0); e^6] = [\sqrt{5}; e^6]$. Таким образом, $|a| \in [f(0); e^6] = [\sqrt{5}; e^6]$.

Ответ: $(-e^6; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; e^6)$.



Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. В последовательности $x^2 + 10x + 19$, $x^2 + 11x + 19$, $x^2 + 12x + 19$, $x^2 + 12x + 18$ ни один трехчлен не имеет целых корней.

б) Нет. Заметим, что при каждой операции значение трехчлена при $x = -1$ менялось ровно на 1, при этом изначально оно было $1 - 10 + 20 = 11 > 0$, а в конце стало $1 - 20 + 10 = -9 < 0$. Значит, в какой-то момент оно было равно нулю. В этот момент многочлен имел корень -1 и по теореме Виета второй его корень также был целым (свободный член, взятый с противоположным знаком).

в) Чтобы сделать наименьшее число операций, нужно только увеличивать коэффициент при x и только уменьшать свободный член. Тогда потребуется 20 операций. Значит, коэффициент при x (обозначим его b) будет принимать значения 10, 11, 12, 13, 14, 15, а свободный член (обозначим его c) — от 20 до 5. Выпишем возможные пары $(b; c)$, дающие точные квадраты: (10; 16), (10; 9), (11; 10), (11; 18), (12; 11), (12; 20), (13; 12), (14; 13), (15; 14).

Кроме того, из пар (10; 9), (11; 10), (12; 11), (13; 12), (14; 13), (15; 14), может реализоваться только один, поскольку у каждой пары разность коэффициентов равна 1, а при указанных действиях разность всегда растет (уменьшаемое растет, вычитаемое уменьшается). Аналогичное утверждение верно и для пар (10; 16), (11; 18), (12; 20). Следовательно, можно сделать не более двух таких трехчленов.

Два трехчлена получить можно, например,

$$x^2 + 10x + 20 \mapsto x^2 + 11x + 20 \mapsto x^2 + 12x + 20 \mapsto x^2 + 12x + 19 \mapsto \dots \mapsto x^2 + 12x + 11 \mapsto \dots$$

Ясно, что дойти до нужного трехчлена дальше можно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 2.