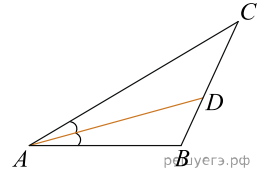


Вариант 178

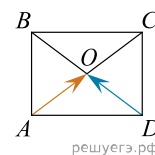
№ 1.

В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 30° , угол BAD равен 22° . Найдите угол ADB . Ответ дайте в градусах.



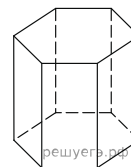
№ 2.

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника $ABCD$ равны 8. Диагонали пересекаются в точке O . Найдите длину разности векторов $\vec{AO}$ и $\vec{DO}$.



№ 3.

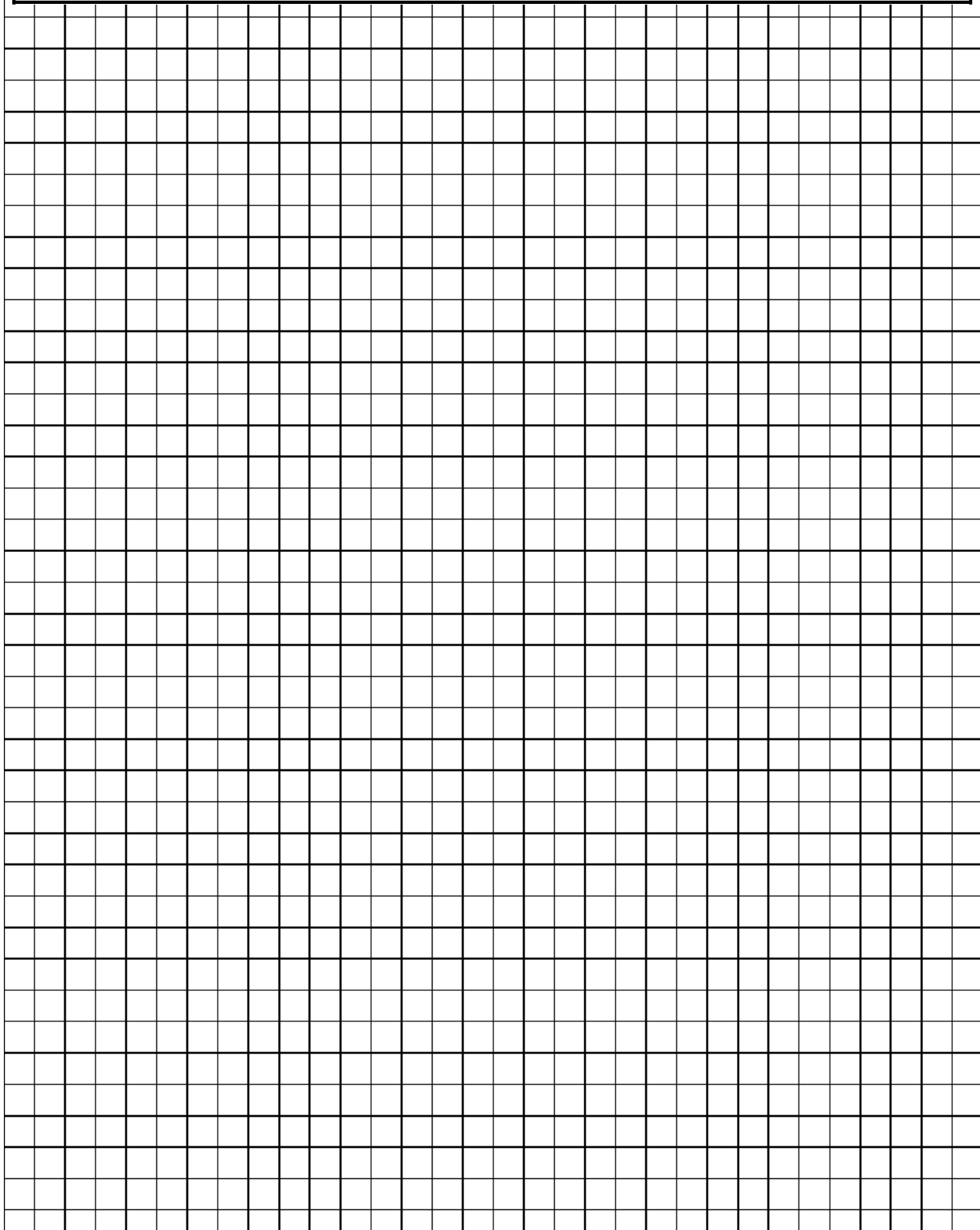
Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 10.



reshueta.ru

№ 4.

За круглый стол на 5 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что девочки будут сидеть рядом.



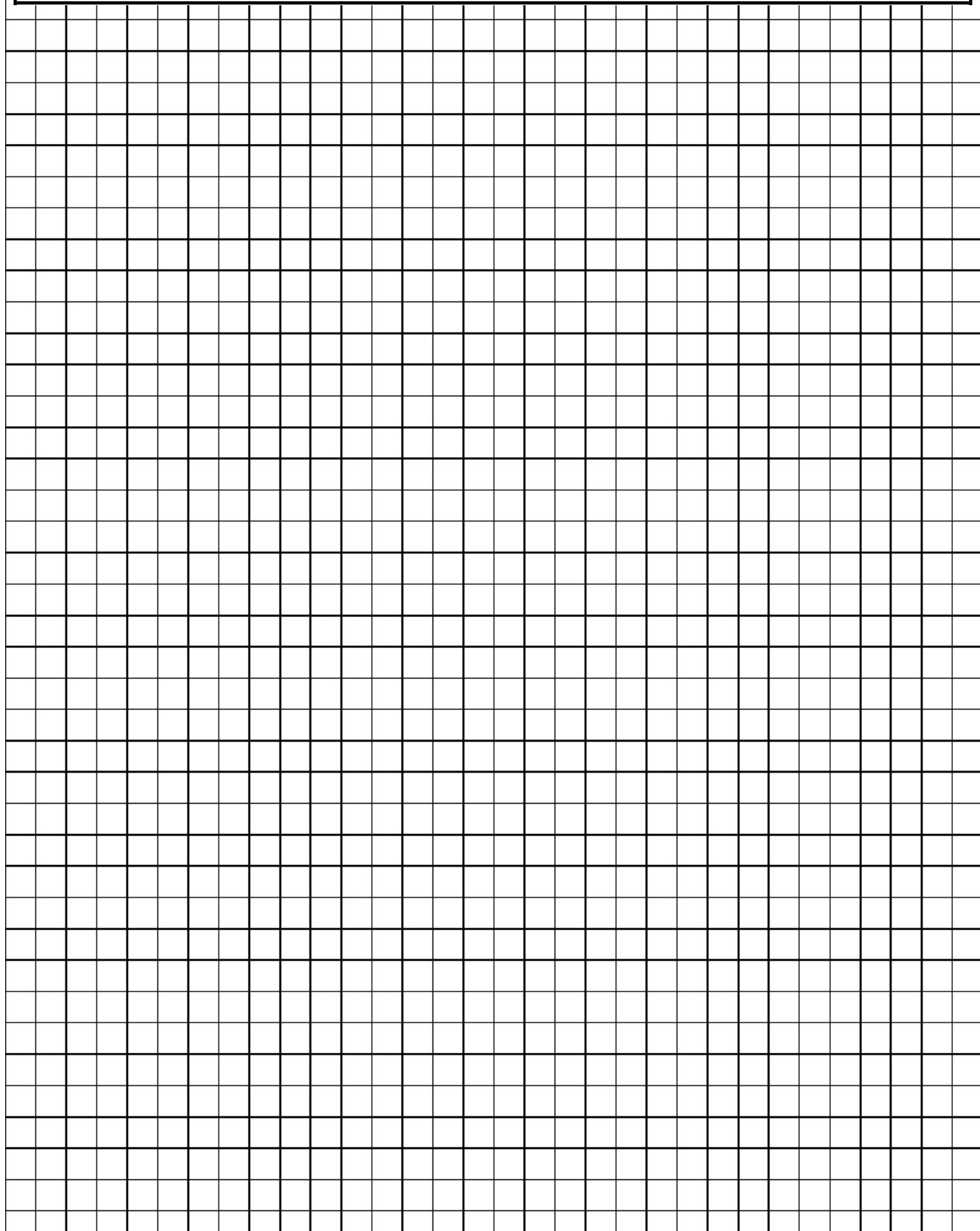
№ 5.

Маша коллекционирует принцесс из Киндер-сюрпризов. Всего в коллекции 10 разных принцесс, и они равномерно распределены, то есть в каждом очередном Киндер-сюрпризе может с равными вероятностями оказаться любая из 10 принцесс. У Маши уже есть две разные принцессы из коллекции. Какова вероятность того, что для получения следующей принцессы Маше придётся купить ещё 2 или 3 шоколадных яйца?

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin black lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

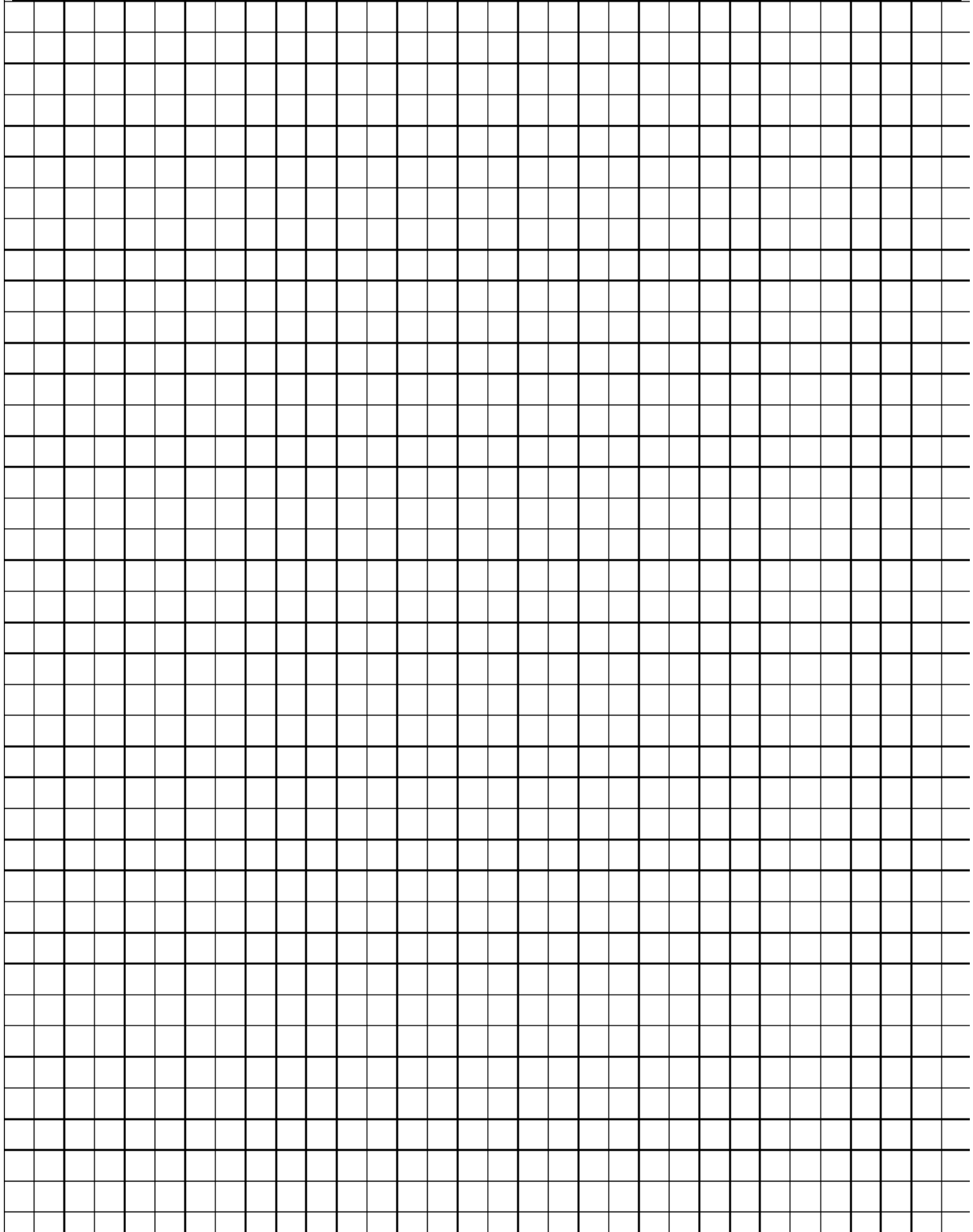
№ 6.

Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}} = \frac{1}{7}$.



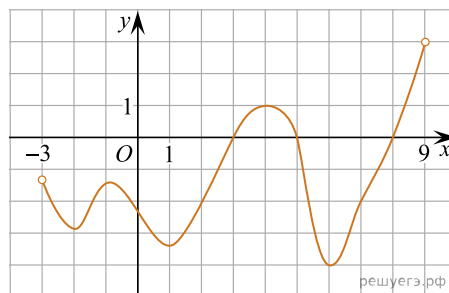
№ 7.

Найдите значение выражения $6x \cdot (3x^{12})^3 : (3x^9)^4$ при $x = 75$.



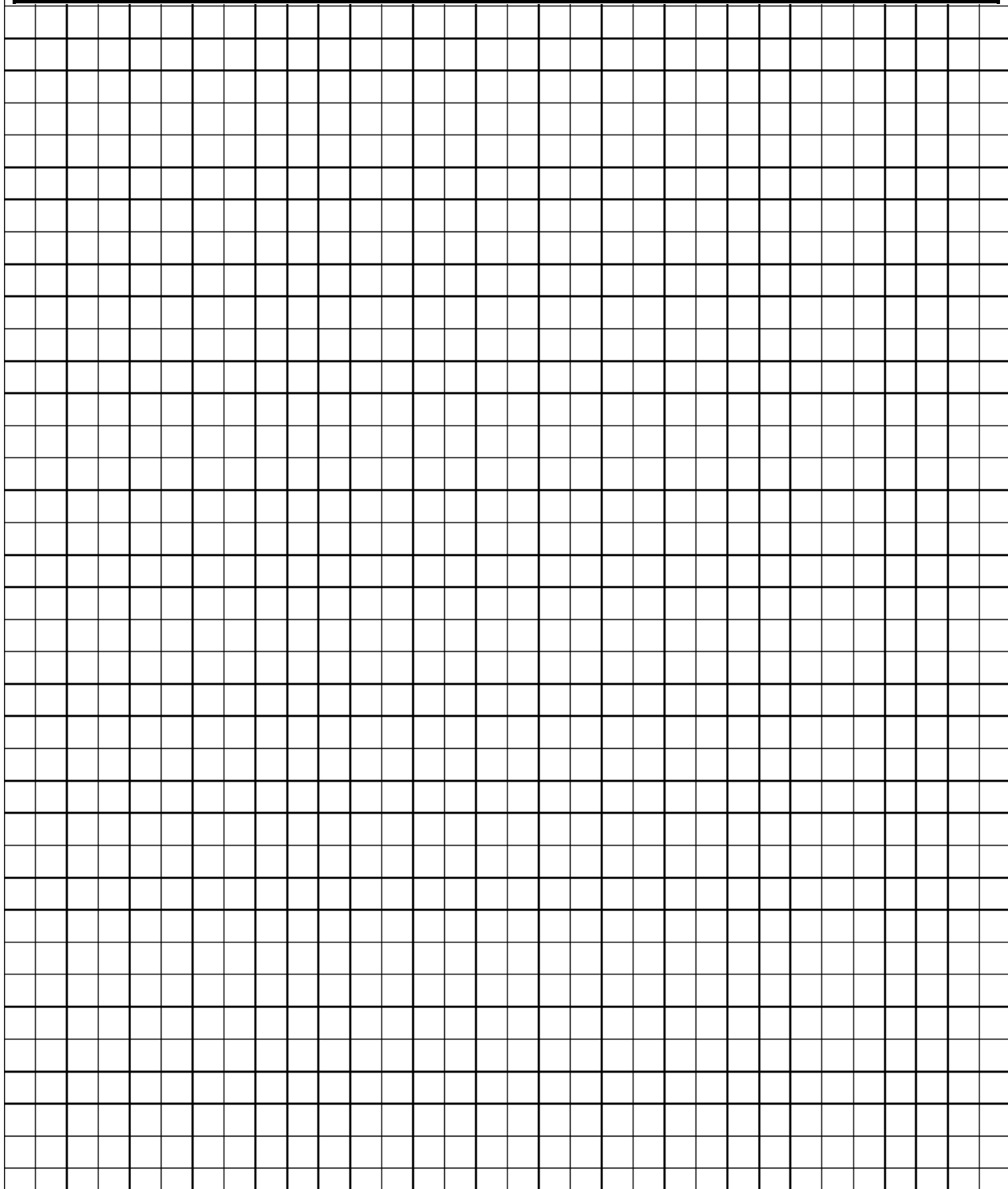
№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[0; 8]$.



№ 9.

Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ кг и радиуса $R = 10$ см, и двух боковых с массами $M = 1$ кг и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$, дается формулой $I = \frac{(m + 2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $625 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

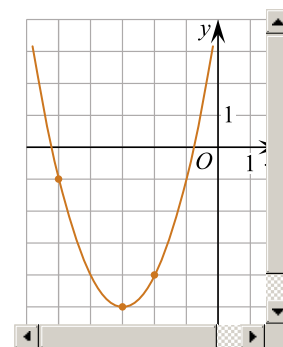


№ 10.

Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00 того же дня. Определите(в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1 км/ч.

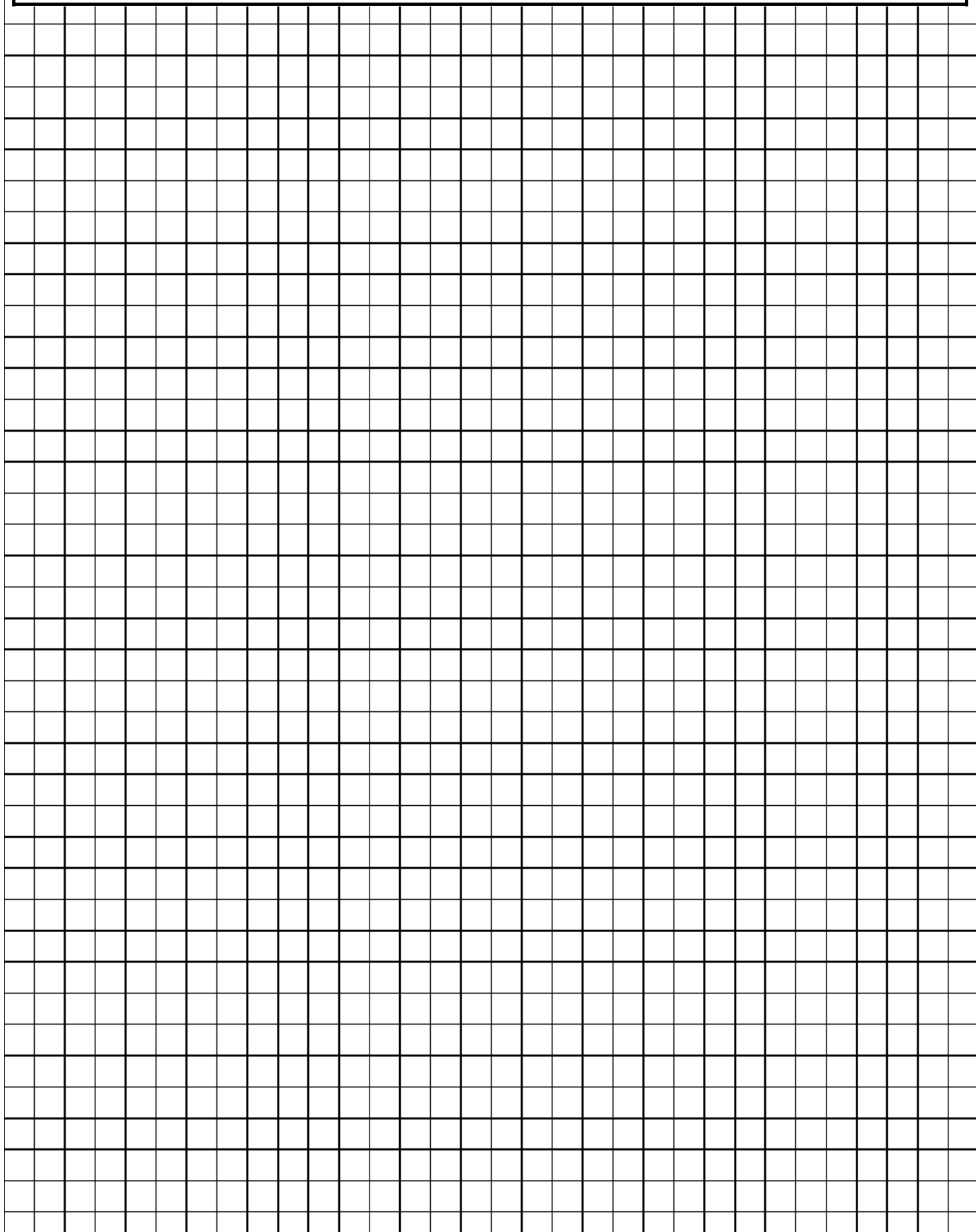
№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.



№ 12.

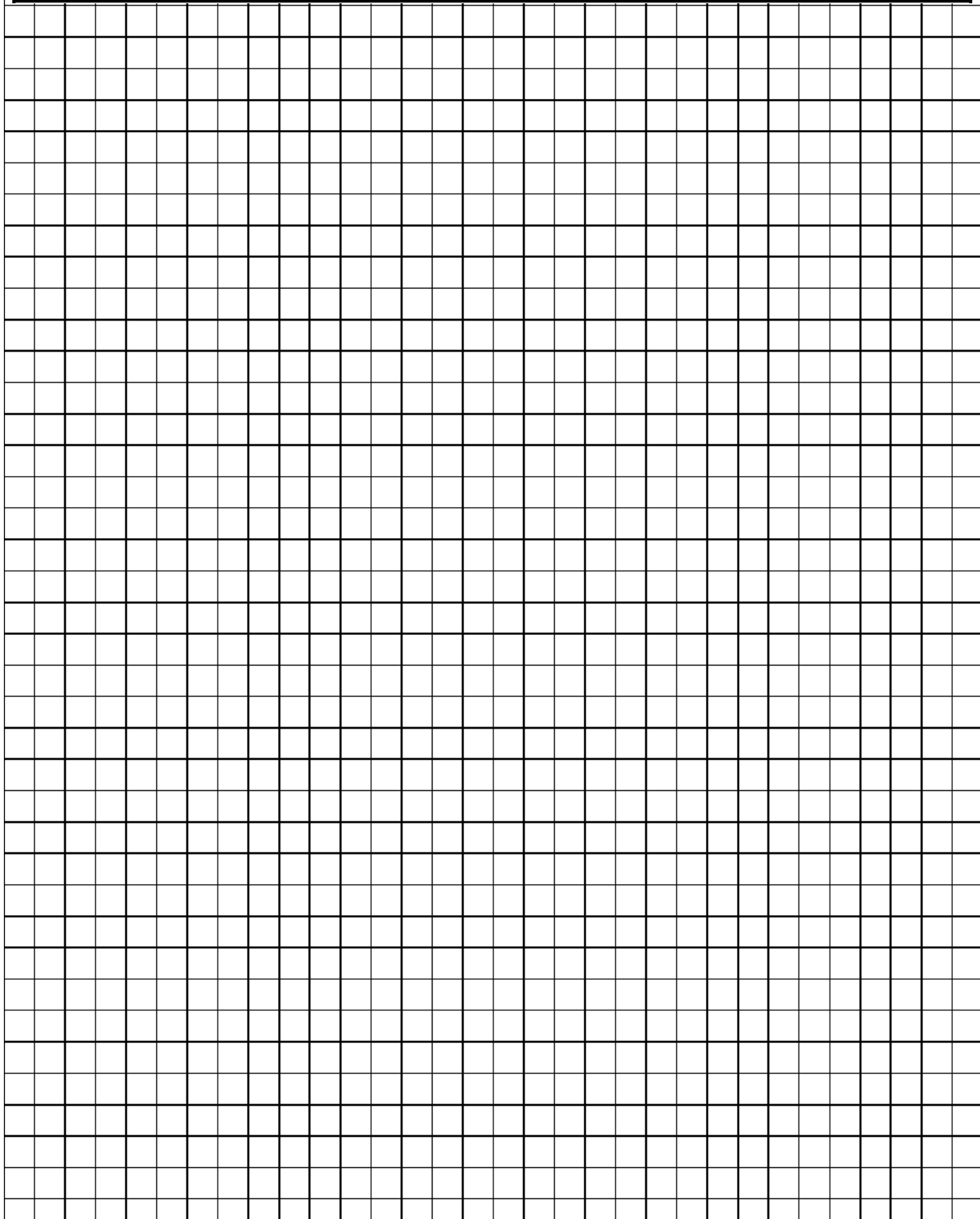
Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3; 3]$.



№ 13.

а) Решите уравнение $\log_2(\sin 2x) = \log_2(\sqrt{2} \cos x)$.

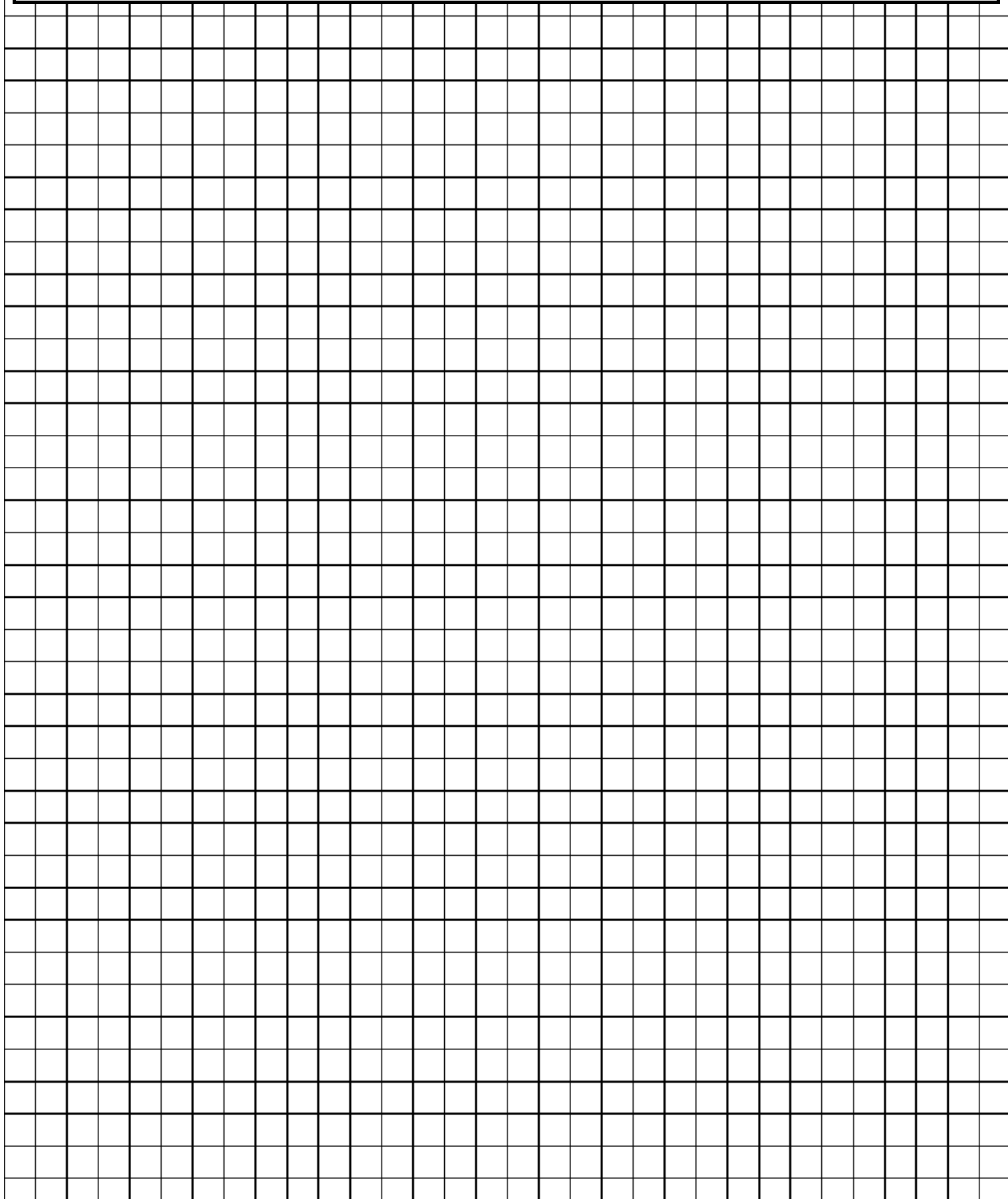
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.



№ 14.

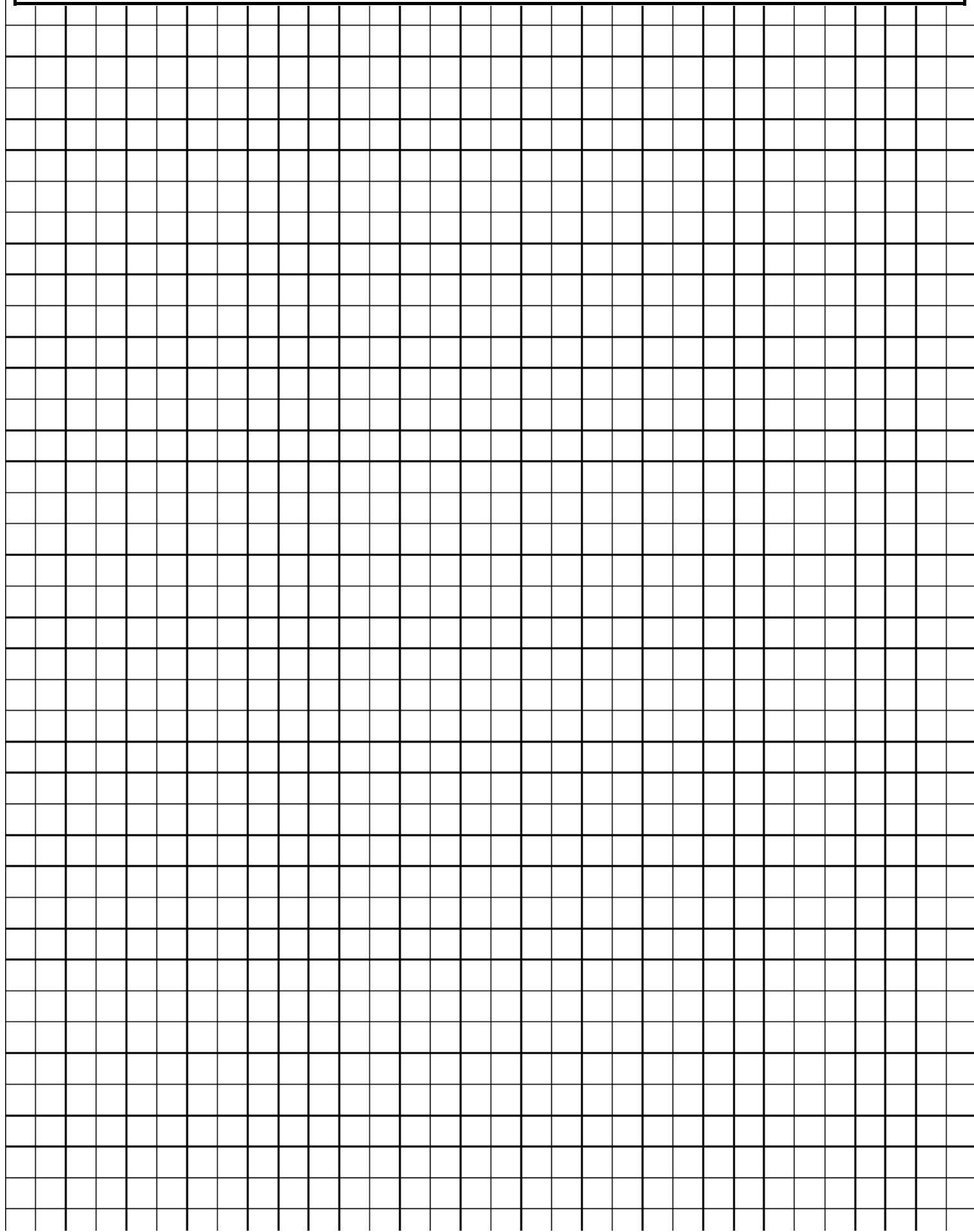
На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ отмечена точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 2$, точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Длины рёбер AD и AA_1 равны 6 и 10 соответственно.

- а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1 является равнобедренной трапецией.
б) Найдите площадь сечения параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью ETD_1 , если $AB = 2\sqrt{10}$.



№ 15.

Решите неравенство: $4^x + 4^{-x} \geq \frac{10}{3}$.



№ 16.

Пенсионерка положила некоторую сумму на счет в банке на полгода. По этому вкладу установлен «плавающий» процент, то есть число начисленных процентов зависит от числа полных месяцев нахождения вклада на счете. В таблице представлены условия начисления процентов.

Срок вклада	1–2 месяца	3–4 месяца	5–6 месяцев
Ставка в % годовых	6%	18%	12%

Какой процент от суммы первоначального вклада составляет сумма, начисленная банком в качестве процентов, если каждый месяц, за исключением последнего, после начисления процентов банком она добавляет на счет такую сумму, чтобы за месяц вклад увеличился на 10% от первоначального вклада?

№ 17.

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$. На боковой стороне AB и большем основании AD взяты соответственно точки K и L так, что прямые KL и CD параллельны и $CK = DL$.

а) Докажите, что $\angle BCK = \angle AKL$.

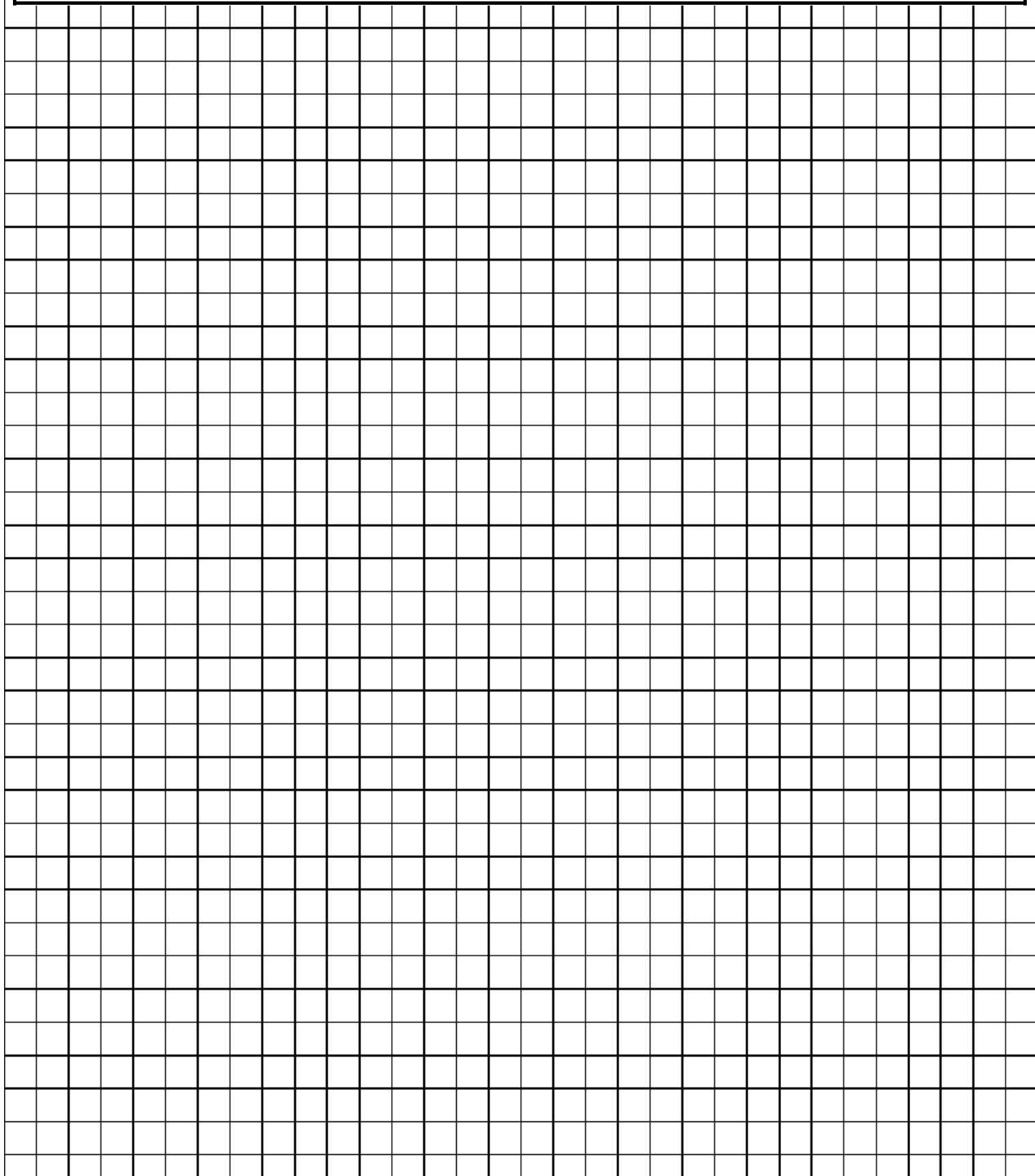
б) Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $KL = 12$, $DL = 2,5BK$ и $S_{CDLK} = 26\sqrt{6}$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 4y + 8}{\sqrt{4-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет три различных решения.



№ 19.

Известно, что a , b , c и d — различные двузначные натуральные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{3a+2c}{b+d} = \frac{12}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b} + \frac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 2d$?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27759	52
2	27712	8
3	27057	300
4	325905	0,5
5	509078	0,192
6	26660	87
7	77397	150
8	508348	3
9	27966	5
10	26587	11
11	508935	31
12	77446	11

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Заметим, что по свойствам логарифма $\sin x < 0$, а $\operatorname{tg} x > 0$, следовательно, $\cos x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}
 -2\sin x + \log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{ctg} x) = 0 &\Leftrightarrow -2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \quad -2\sin x + \log_{\operatorname{tg} x}(\operatorname{ctg} x) = 0 \Leftrightarrow -2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Ограничениям удовлетворяет только серия $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберем корни при помощи двойного неравенства:

$$\begin{aligned}
 25\pi &\leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 26\pi \Leftrightarrow 25 \leq -\frac{5}{6} + 2k \leq 26 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 150 &\leq -5 + 12k \leq 156 \Leftrightarrow 155 \leq 12k \leq 161 \Leftrightarrow 12\frac{11}{12} \leq k \leq 13\frac{5}{12}. \quad 25\pi \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq 26\pi \Leftrightarrow 25 \leq -\frac{5}{6} + 2k \leq 26 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 150 \leq -5 + 12k \leq 156 \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 155 \leq 12k \leq 161 \Leftrightarrow 12\frac{11}{12} \leq k \leq 13\frac{5}{12}.$$

Полученное неравенство имеет целое решение $k = 13$, которому соответствует корень $\frac{151\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{151\pi}{6}$.

№ 14.

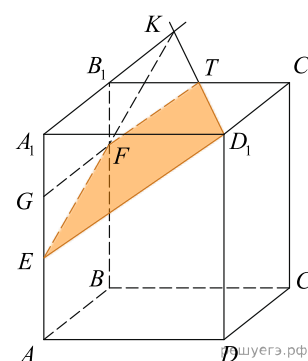
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Продлим отрезок D_1T до пересечения с прямой A_1B_1 в точке K . Далее проведем прямую EK . Она пересечет ребро BB_1 в точке F . Четырехугольник $EFTD_1$ — искомое сечение. Плоскости BB_1C_1 и AA_1D_1 параллельны, значит, прямые FT и ED_1 также параллельны. Отрезки EF и TD лежат на пересекающихся прямых, следовательно, четырехугольник $EFTD_1$ — трапеция.

Треугольники D_1C_1T и KB_1T равны по катету и острому углу, поэтому $KB_1 = C_1D_1 = A_1B_1$. Тогда отрезок B_1F — средняя линия треугольника KA_1E , а потому $B_1F = AG = \frac{1}{2}A_1E$. Проведем отрезок FG параллельно стороне A_1B_1 , тогда треугольники GFE и TC_1D равны по двум катетам, то есть

$$A_1G = B_1F = \frac{1}{2}A_1E = C_1T = GE,$$

$EF = TD_1$, а значит, трапеция $EFTD_1$ равнобедренная.



б) Имеем: $A_1E = 6$, $GE = 3$, тогда

$$EF = TD_1 = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + 3^2} = 7,$$

$$FT = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

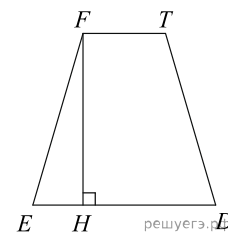
$$ED_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}.$$

Проведем FH — высоту трапеции, найдем ее длину:

$$EH = \frac{1}{2}(6\sqrt{2} - 3\sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

откуда

$$FH = \sqrt{7^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{49 - 4,5} = \sqrt{\frac{89}{2}}.$$



Тогда для площади равнобедренной трапеции $EFTD_1$ получаем:

$$S_{EFTD_1} = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + 6\sqrt{2}) \cdot \sqrt{\frac{89}{2}} = \frac{9\sqrt{89}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{89}}{2}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $y = 4^x$, $y > 0$ тогда

$$y + \frac{1}{y} \geq \frac{10}{3} \Leftrightarrow_{y>0} 3y^2 - 10y + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{1}{3}, \\ y \geq 3. \end{cases}$$

Откуда $x \leq -\log_4 3$ или $x \geq \log_4 3$.

Ответ: $(-\infty; -\log_4 3] \cup [\log_4 3; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. В условии задачи приведены годовые процентные ставки. Месячные ставки пропорционально меньше: за два месяца хранения денег будет начислено $6:12=0,5(\%)$ от суммы вклада, за 4 месяца будет начислено $18:12=1,5(\%)$, а за 6 месяцев будет начислено $12:12=1(\%)$. Заметим, что условие задачи непротиворечиво, по-

сколько 10% больше, чем каждая из надбавок в размере 0,5%, 1% и 1,5%.

Пусть первоначально сумма вклада была равна K у. е., составим таблицу по данным задачи.

Месяцы	Начисление банка, (у. е.)	Величина вклада к началу следующего месяца с учетом дополнительного взноса (у. е.)
1	$K \cdot 0,005 = 0,005K$	$1,1K$
2	$1,1K \cdot 0,005 = 0,0055K$	$1,2K$
3	$1,2K \cdot 0,015 = 0,018K$	$1,3K$
4	$1,3K \cdot 0,015 = 0,0195K$	$1,4K$
5	$1,4K \cdot 0,01 = 0,014K$	$1,5K$
6	$1,5K \cdot 0,01 = 0,015K$	$1,5K + 0,015K = 1,515K$ (дополнительного вклада не было)

За полгода банк начислил

$$(0,005 + 0,0055 + 0,018 + 0,0195 + 0,014 + 0,015)K = 0,077K \text{ (у. е.)},$$

то есть $\frac{0,077K}{K} \cdot 100\% = 7,7\%$.

Ответ: 7,7.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Заметим, что четырехугольник $KCDL$ — равнобедренная трапеция, поэтому $\angle KCD = \angle CDL$. Основания KL и CD параллельны, поэтому

$$\angle CDL = \angle KLA = \angle KAL,$$

откуда

$$\angle BCK = \angle BCD - \angle KCD = \angle ABC - \angle KLA,$$

$$\angle AKL = 180^\circ - 2\angle KAL = (180^\circ - \angle KAL) - \angle KAL = \angle ABC - \angle KLA.$$

Таким образом, $\angle BCK = \angle AKL$.

б) Пусть $BK = 2x$, тогда $DL = 5x = CK$ и $CD = AB = 2x + 12$. Пусть отрезок LH — высота трапеции $KCDL$, следовательно,

$$LH^2 = (5x)^2 - \left(\frac{2x + 12 - 12}{2}\right)^2 = 24x^2,$$

откуда $LH = 2\sqrt{6}x$. Тогда

$$S_{CDLK} = \frac{1}{2}(12 + 2x + 12) \cdot 2\sqrt{6}x = 26\sqrt{6},$$

откуда $x(x + 12) = 13$, то есть $x = 1$, а значит, $CD = 14$.

Заметим, что

$$\sin \angle LDH = \frac{LH}{LD} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

следовательно, в трапеции $ABCD$ высота $h = 14 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Тогда

$$\cos \angle KAL = \cos \angle LDH = \sqrt{1 - \frac{24}{25}} = \frac{1}{5},$$

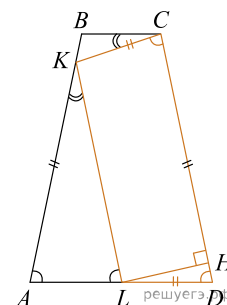
откуда $AL = 2 \cdot 12 \cdot \cos \angle KAL = \frac{24}{5}$ и $AD = \frac{24}{5} + 5 = \frac{49}{5}$. Находим основание BC :

$$BC = AD - 2 \cdot CD \cdot \cos \angle CDA = \frac{49}{5} - \frac{28}{5} = \frac{21}{5}.$$

Таким образом, для площади равнобедренной трапеции $ABCD$ получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (BC + AD) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{70}{5} \cdot \frac{28\sqrt{6}}{5} = \frac{196\sqrt{6}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{196\sqrt{6}}{5}$.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только исключением точки $a = 4$.	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(4; +\infty)$, возможно, с исключением граничной точки $a = 4$ и исключением точки $a = 3$ или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения.	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности и прямых (аналитически или графически).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

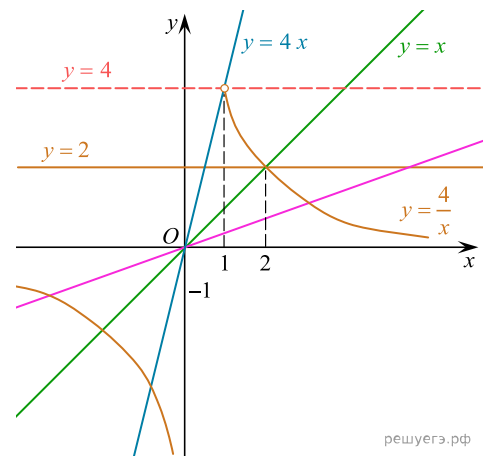
$$\frac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{4-y}} = 0.$$

При $y \geq 4$ левая часть не имеет смысла. При $y < 4$ уравнение задаёт прямую $y = 2$ и гиперболу $y = \frac{4}{x}$ (см. рис.). При каждом значении a уравнение $y = ax$ задаёт прямую с угловым коэффициентом a , проходящую через начало координат.

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{4}{x}$ с прямой $y = ax$ при условии $y < 4$.

Прямая $y = ax$ пересекает прямую $y = 2$ при $a < 0$ и при $a > 0$; пересекает правую ветвь гиперболы при $0 < a < 4$, пересекает левую ветвь гиперболы при $a > 0$, проходит через точку пересечения прямой $y = 2$ и гиперболы при $a = 1$.

Таким образом, исходная система имеет три различных решения при $0 < a < 1$ и при $1 < a < 4$.



решуегэ.рф

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 4)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а; — обоснованное решение п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Пусть $a = 10$, $b = 50$, $c = 15$ и $d = 45$. Тогда $\frac{3a+2c}{b+d} = \frac{60}{95} = \frac{12}{19}$.

б) Предположим, что $11 \cdot \frac{3a+2c}{b+d} = \frac{3a}{b} + \frac{2c}{d}$. Тогда

$$\begin{aligned} 11 \cdot (3a+2c)bd &= (b+d)(3ad+2bc) \Leftrightarrow 33abd+22bcd = 3abd+2bcd+3ad^2+2b^2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 30abd-3ad^2 &= 2b^2c-20bcd \Leftrightarrow 3ad(10b-d) = 2bc(b-10d). \quad 11 \cdot (3a+2c)bd = (b+d)(3ad+2bc) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 33abd+22bcd &= 3abd+2bcd+3ad^2+2b^2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 30abd-3ad^2 &= 2b^2c-20bcd \Leftrightarrow 3ad(10b-d) = 2bc(b-10d). \quad 11 \cdot (3a+2c)bd = (b+d)(3ad+2bc) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 33abd+22bcd &= 3abd+2bcd+3ad^2+2b^2c \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 30abd-3ad^2 &= 2b^2c-20bcd \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3ad(10b-d) &= 2bc(b-10d). \end{aligned}$$

С другой стороны, имеем

$$10b-d \geq 10 \cdot 10 - 99 > 0 > 99 - 10 \cdot 10 \geq b-10d.$$

Следовательно, числа $3ad(10b-d)$ и $2bc(b-10d)$ имеют разные знаки. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99 \geq c \geq 2d+1$ и $a \geq 3b+1$. Значит, $d \leq \frac{98}{2} = 49$. Используя неравенства $a \geq 3b+1$, $c \geq 2d+1$, $d \leq 49$ и $b \geq 10$, получаем

$$\frac{3a+2c}{b+d} \geq \frac{9b+4d+5}{b+d} = 4 + \frac{5b+5}{b+d} \geq 4 + \frac{5b+5}{b+49} = 9 - \frac{240}{b+49} \geq 9 - \frac{240}{59} = \frac{291}{59}.$$

$$b+d \quad b+d \quad b+d \quad b+49 \quad b+49 \quad b+49 \quad b+49 \quad b+d \quad b+d \quad b+d \quad b+49$$

$$= 9 - \frac{240}{b+49} \geq 9 - \frac{240}{59} = \frac{291}{59}.$$

Пусть $a=31$, $b=10$, $c=99$ и $d=49$. Тогда $\frac{3a+2c}{b+d} = \frac{291}{59}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{3a+2c}{b+d}$ равно $\frac{291}{59}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{291}{59}$.
