

Вариант 179

№ 1.

Термометр измеряет температуру в помещении. Вероятность того, что температура окажется выше $+18^{\circ}\text{C}$, равна 0,82. Вероятность того, что температура окажется ниже $+21^{\circ}\text{C}$, равна 0,65. Найдите вероятность того, что температура в помещении окажется в промежутке от $+18^{\circ}\text{C}$ до $+21^{\circ}\text{C}$.

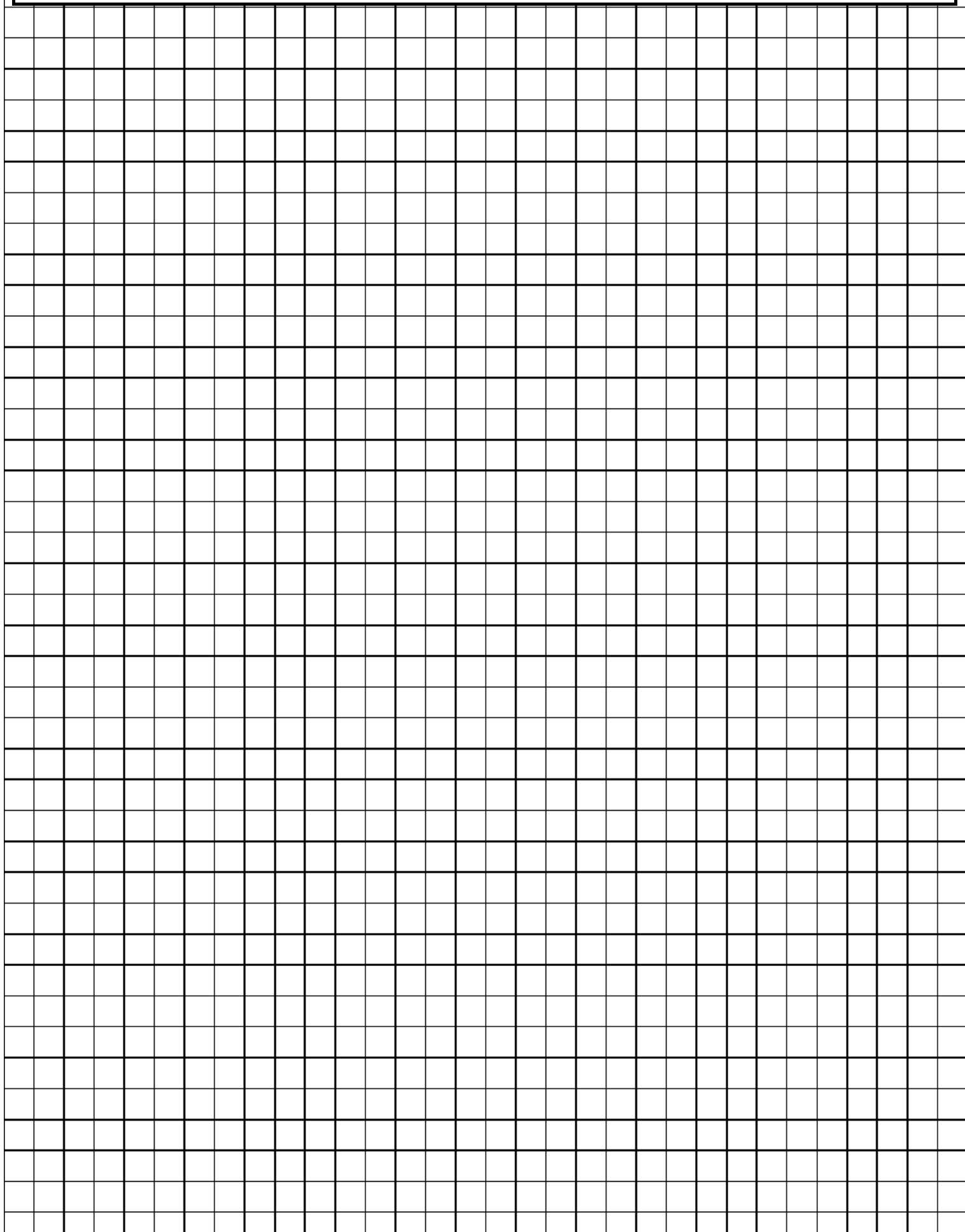
№ 2.

Правильный игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не стала равна 3. Какова вероятность того, что был сделан ровно один бросок? Ответ округлите до сотых.

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin black lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

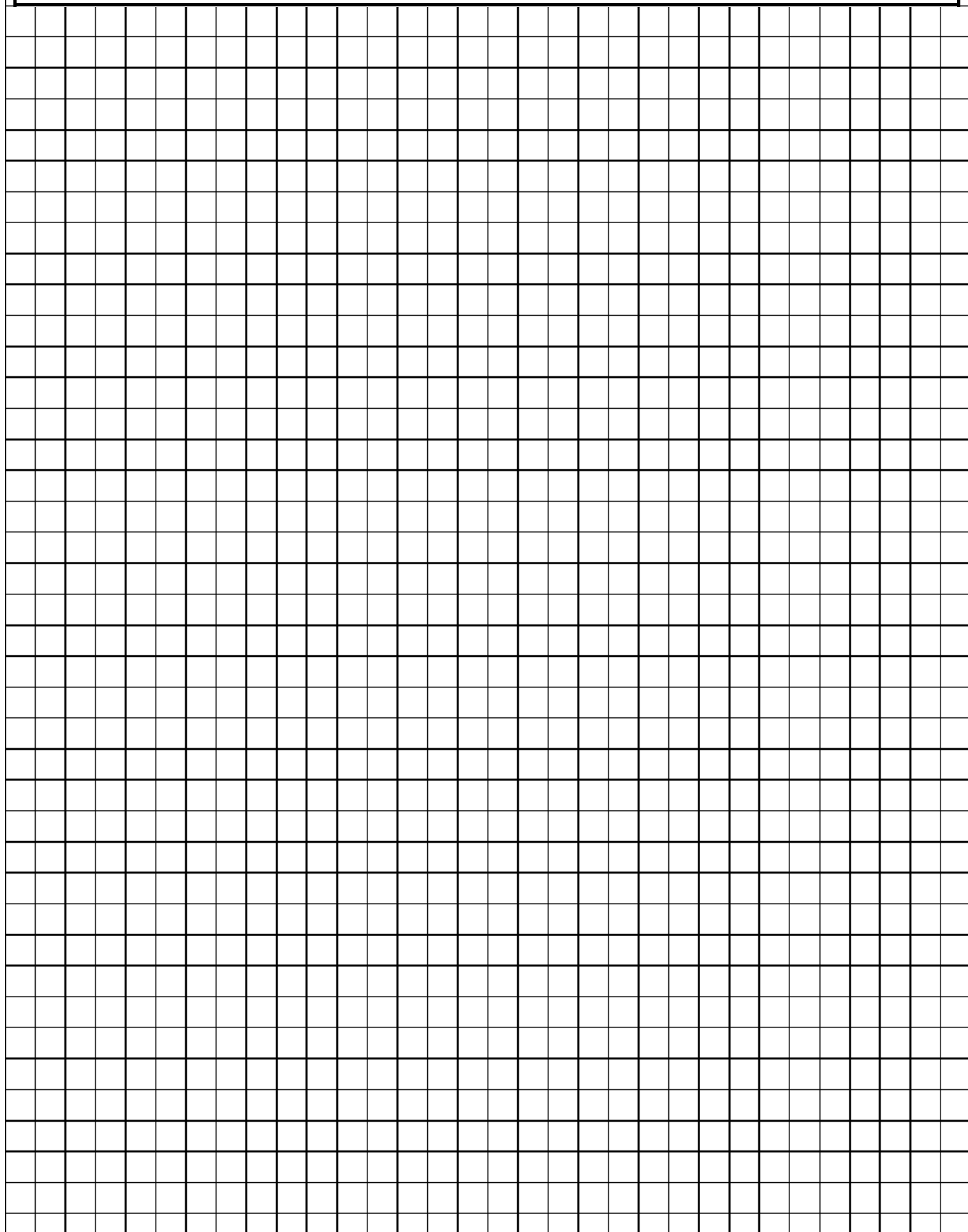
№ 3.

Найдите корень уравнения $\log_2(15+x) = \log_2 3$.



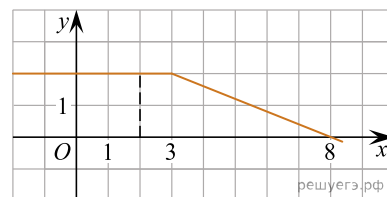
№ 4.

Найдите значение выражения $64^{\log_8 \sqrt{3}}$.



№ 5.

На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



№ 6.

Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных изданий на основе показателей информативности In , оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый показатель — целое число от -2 до 2 .

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится втрое, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr}{A}.$$

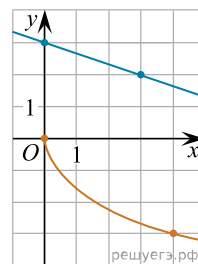
Найдите, каким должно быть число A , чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 30.

№ 7.

Из городов A и B навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в A , а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?

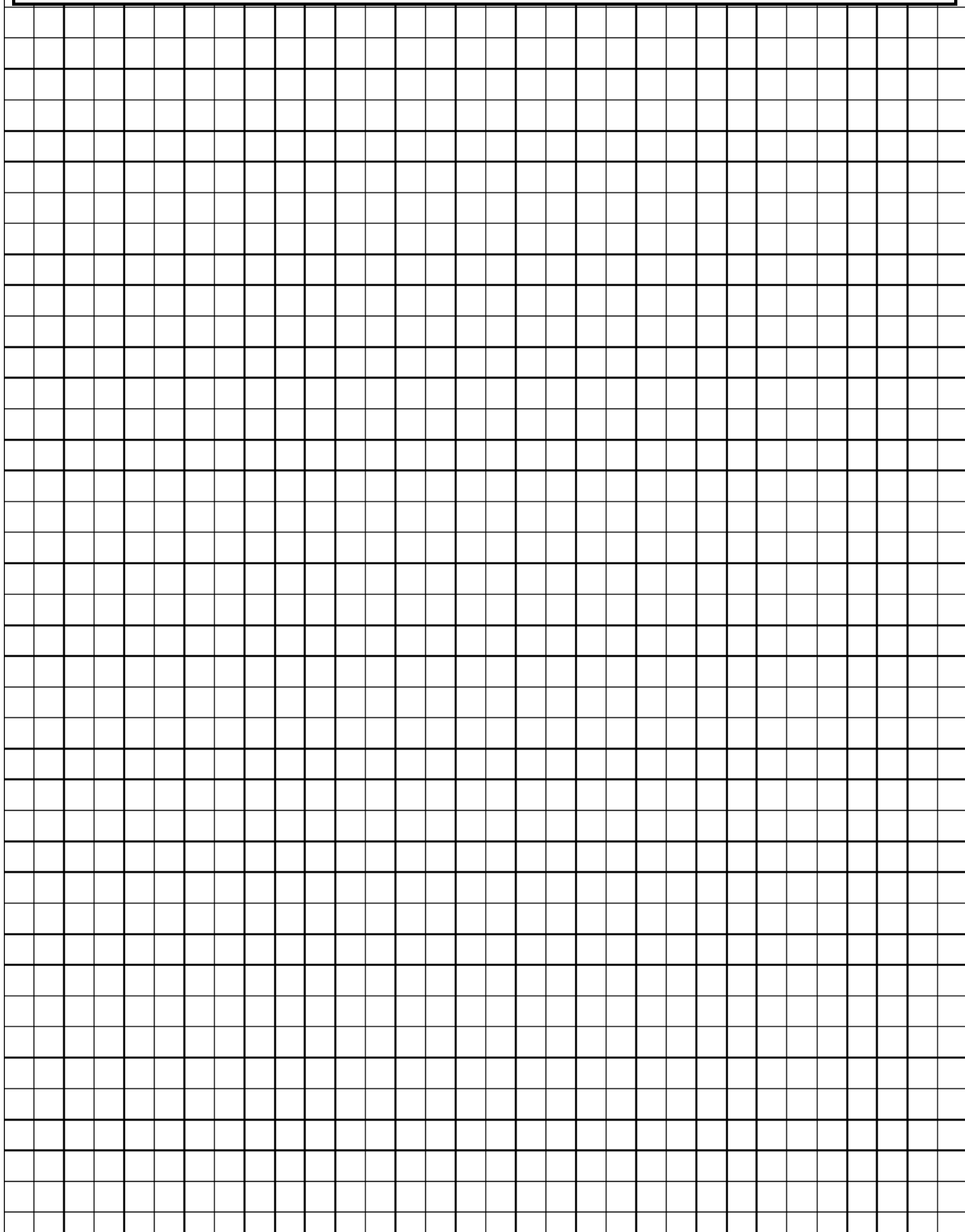
№ 8.

На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A . Найдите ординату точки A .



№ 9.

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0; 4]$.



№ 10.

а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) = \frac{1}{2} + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$.

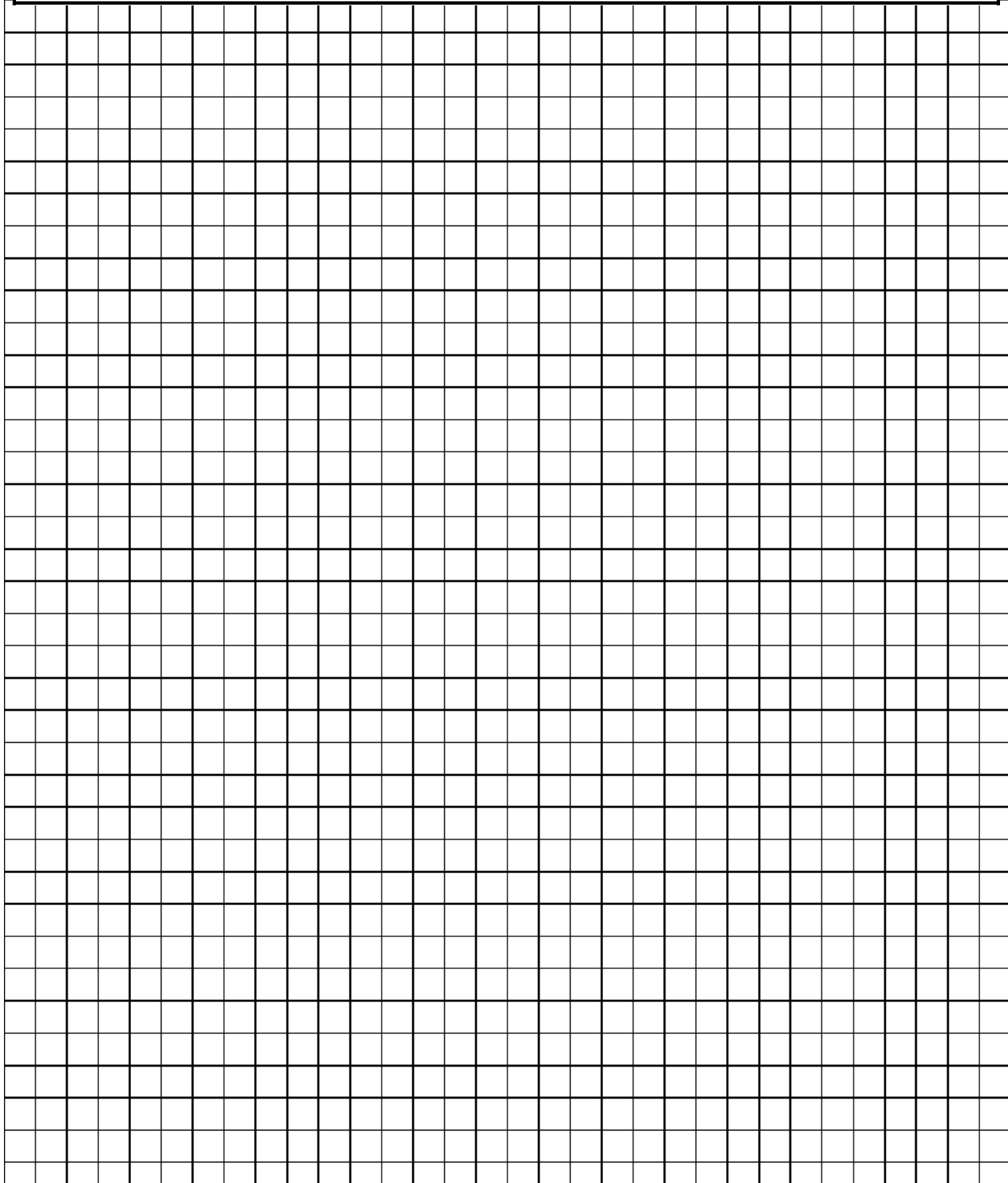
б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

№ 11.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагонали пересекаются в точке O . Точки M и N — середины ребер AB и BC соответственно.

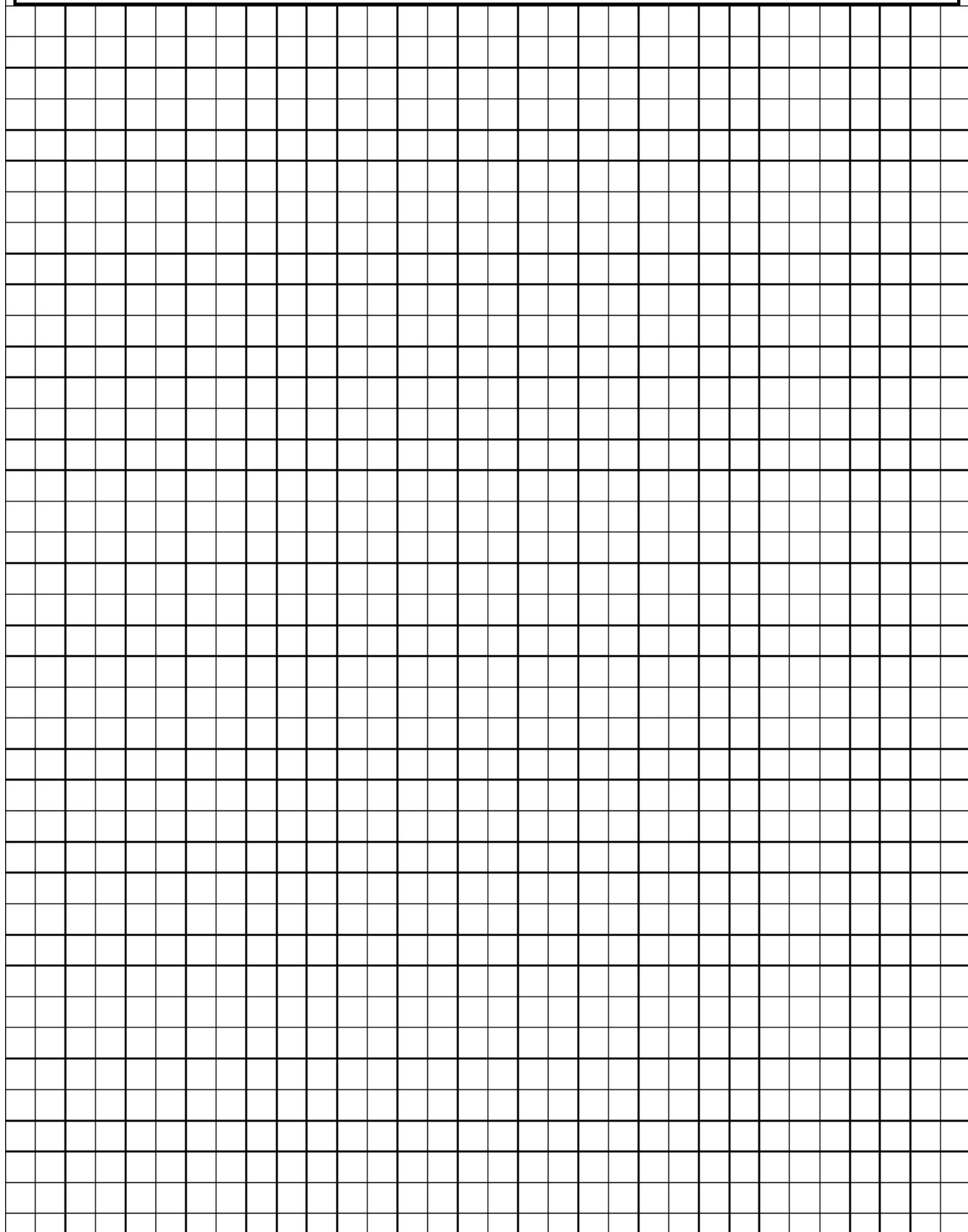
а) Докажите, что плоскость α , проходящая через точку O параллельно прямым $B_1 M$ и $C_1 N$, делит ребро BB_1 в отношении $1 : 1$.

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α , если $AB = 6$, $BC = 4$ и $AA_1 = 3$.



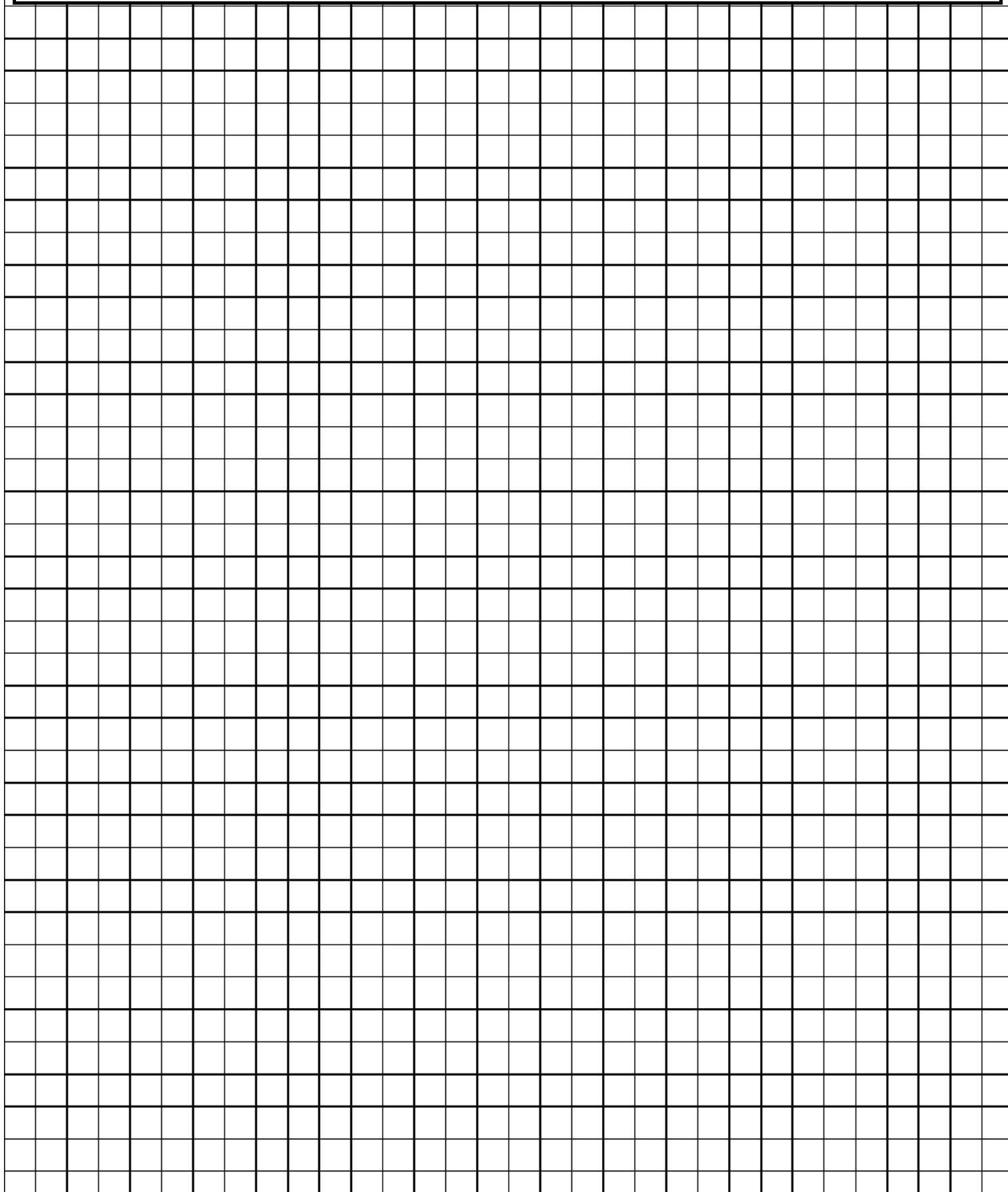
№ 12.

Решите неравенство: $5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \leq 10$.



№ 13.

В аграрной стране A производство пшеницы на душу населения в 2015 году составляло 192кг и ежегодно увеличивалось на 20%. В аграрной стране B производство пшеницы на душу населения в 2015 году составляло 375кг. В течение трех лет производство зерна в стране B увеличивалось на 14% ежегодно, а ее население увеличивалось на $m\%$ ежегодно. В 2018 году производство зерна на душу населения в странах A и B стало одинаковым. Найдите m .



№ 14.

Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C . Проведена высота CH . На сторонах AC и BC соответственно отмечены точки M и N так, что угол MHN прямой.

а) Докажите, что треугольники MNH и ABC подобны.

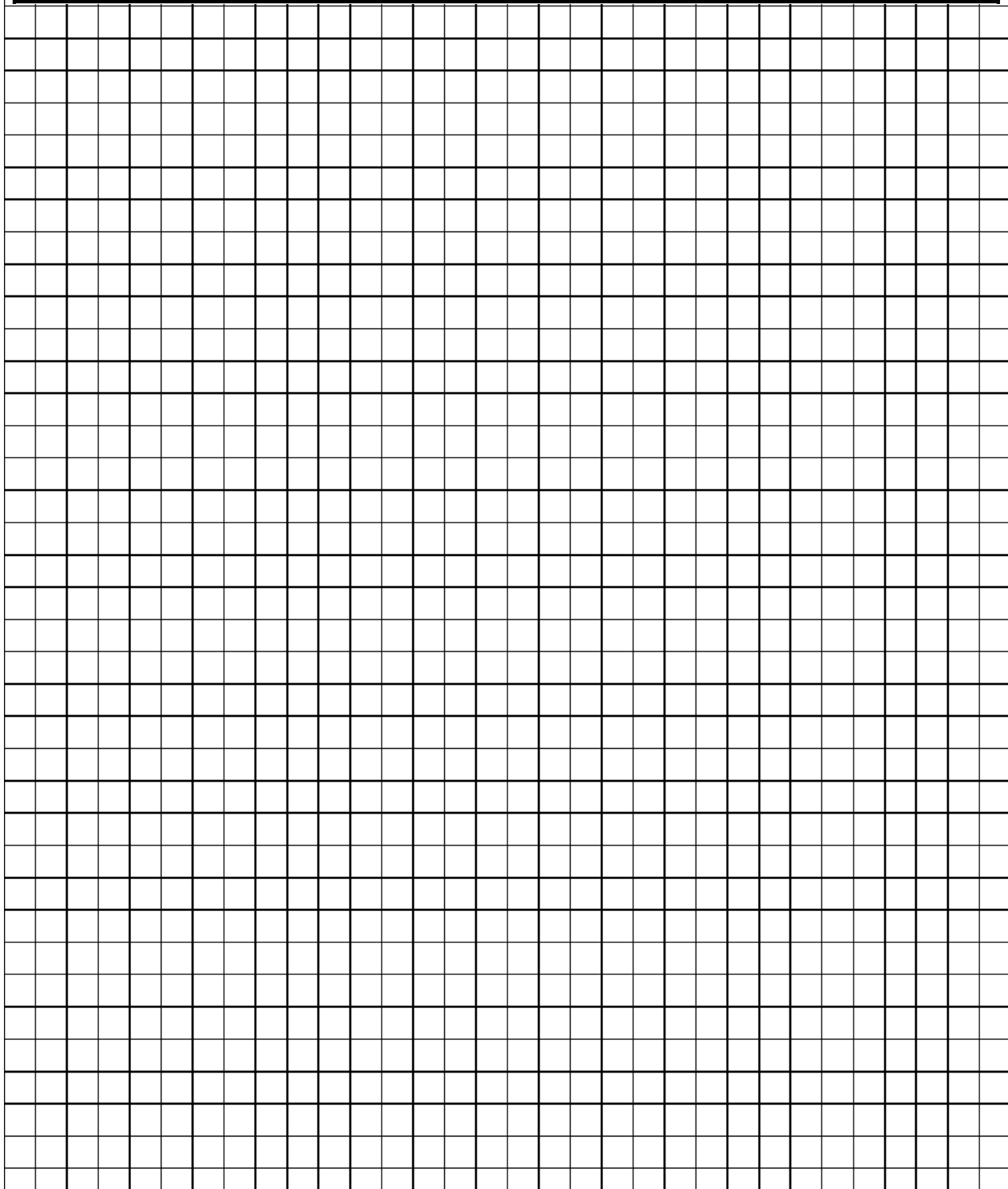
б) Найдите BN , если $AM = 9$, $MC = 3$, $BC = 8$.

№ 15.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди решений неравенства

$$(x+2)\sqrt{ax+x-x^2-a} \geq 0$$

найдутся два числа, разность между которыми равна 4.



№ 16.

Гипермаркет, реализующий новогодние товары, состоит из трех отделов. В первом отделе представлены новогодние товары, цена каждого из которых меньше 100 руб. Средняя цена товаров в этом отделе равна 90 руб. Во втором отделе представлены новогодние товары, цена каждого из которых больше 100 руб. Средняя цена товаров в этом отделе равна 120 руб. Цена каждого товара в третьем отделе равна 100 руб. Средняя цена всех товаров в гипермаркете равна 110 руб., а общее число товаров равно 200. Все цены выражаются целым числом рублей.

- Может ли в первом отделе быть столько же товаров, сколько и во втором?
- Может ли в третьем отделе быть на 14 товаров больше чем во втором?
- Чему может равняться наибольшая возможная при этих условиях цена товара в этом гипермаркете?

Ответы

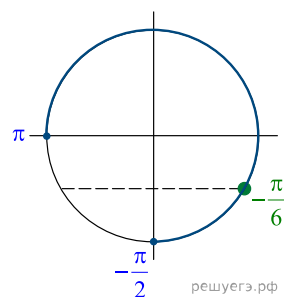
Номер	Задание	Ответ
1	670263	0,47
2	674923	0,73
3	26649	-12
4	26885	3
5	323078	7
6	317096	0,4
7	99592	4
8	509280	-9
9	77421	-54

№ 10.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Примени формулы понижения степени, затем формулы приведения:

$$\begin{aligned}
 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{2} \Leftrightarrow \\
 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \\
 \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -\sin x = 1 + \sin x &\Leftrightarrow 2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



б) Отберем корни при помощи тригонометрической окружности. Подходит: $-\frac{\pi}{6}$.

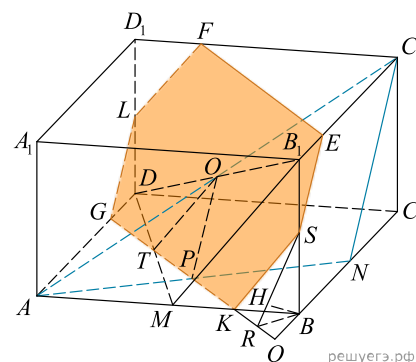
Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{\pi}{6}$.

№ 11.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
--	-------

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

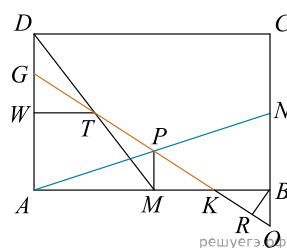
Решение. а) Точка O принадлежит прямой B_1D , следовательно, точка O принадлежит плоскости B_1DM . В плоскости DB_1M проведем отрезок OT , параллельный отрезку B_1M , где точка T принадлежит плоскости ABC , тогда точка T принадлежит также плоскости α . Точка O принадлежит прямой AC_1 . В плоскости AC_1N проведем отрезок OP , параллельный отрезку C_1N , где точка P принадлежит плоскости ABC , тогда точка P принадлежит также плоскости α . Таким образом, прямая TP — линия пересечения плоскости ABC с плоскостью α . Пусть K и G — точки пересечения прямой TP с ребрами AB и AD соответственно. Через точку K проведем прямую, параллельную прямой B_1M , пусть S — точка ее пересечения с ребром BB_1 , через точку S проведем прямую, параллельную прямой C_1N , пусть E — точка ее пересечения с ребром B_1C_1 , через точку E проведем прямую, параллельную прямой GK , пусть F — точка ее пересечения с ребром C_1D_1 , через точку E проведем прямую, параллельную прямой KS , пусть L — точка ее пересечения с ребром DD_1 . Тогда $GKSEFL$ — сечение параллелепипеда плоскостью α .



Пусть TW — средняя линия треугольника ADM , тогда $TW = \frac{1}{2}AM$. Точку пересечения прямой GK с прямой BC обозначим Q . Треугольники QPN и GPA равны по стороне ($AP = PN$) и двум прилежащим углам. Следовательно, $QN = GA$, а так как $BN = AW$, то $QB = GW$ и треугольники KBQ и TWG равны по катету и острому углу. Тогда

$$BK = WT = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{2}BM,$$

и K — середина MB , а поскольку прямые KS и B_1M параллельны, то точка S — середина BB_1 и $BS : SB_1 = 1 : 1$.



б) Прямая C_1N параллельна плоскости α , следовательно, расстояние от точки C_1 до плоскости α равно расстоянию от точки N до плоскости α . Заметим, что Q — точка пересечения прямой BC с плоскостью α . Треугольники QBK и PMK равны по катету ($MK = BK$) и острому углу, следовательно,

$$BQ = PM = \frac{1}{2}BN = \frac{1}{3}NQ,$$

значит, $NQ = 3BQ$ и $d(N, \alpha) = 3d(B, \alpha)$.

В плоскости ABC проведем отрезок BR , перпендикулярный GQ , отрезок BR является проекцией отрезка SR на плоскость ABC , и по теореме о трех перпендикулярах GQ и SR перпендикулярны, следовательно, прямая GQ перпендикулярна плоскости SBR . В плоскости SBR из точки B опустим перпендикуляр BH на прямую SR . Тогда $BH \perp SR$, $BH \perp GQ$, следовательно, BH является перпендикуляром к плоскости α и $d(B, \alpha) = BH$.

$$KB = \frac{1}{4}AB = \frac{3}{2},$$

$$BQ = \frac{1}{4}BC = 1, \quad SB = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{3}{2},$$

$$KQ = \sqrt{KB^2 + BQ^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{13}}{2},$$

откуда

$$BR = \frac{KB \cdot BQ}{KQ} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

$$SR = \sqrt{SB^2 + BR^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{13}} = \frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt{13}},$$

следовательно,

$$BH = \frac{BR \cdot SB}{SR} = \frac{\frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{17}}{2\sqrt{13}}} = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Таким образом, $d(N, \alpha) = \frac{9}{\sqrt{17}}$.

Ответ: б) $\frac{9}{\sqrt{17}}$.

№ 12.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть $\log_2 x = t$, тогда

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \leq 10. \quad (*)$$

Для $t = 0$ неравенство не определено. Если $t < 0$, то левая часть неравенства(*) отрицательна и неравенство верно. Если $t > 0$, то по неравенству о средних и свойству двух взаимно обратных чисел

$$5^{\frac{1}{t}} \cdot t + 5^t \cdot \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}} \cdot t \cdot 5^t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{5^{\frac{1}{t}+t}} \geq 2\sqrt{5^{\frac{1}{1}+1}} = 2\sqrt{5^2} = 10,$$

а потому неравенство (*) выполняется только при $t = 1$. Таким образом, $t < 0$ или $t = 1$.

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \log_2 x < 0, \\ \log_2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1) \cup \{2\}$.

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть производство пшеницы на душу населения в 2015 году в стране A равнялось A_{2015} , а в 2018 году — A_{2018} . Пусть также производство пшеницы на душу населения в 2015 году в стране B равнялось B_{2015} , а в 2018 году — B_{2018} . Тогда $A_{2018} = A_{2015} \cdot 1,2^3$,

$$B_{2018} = B_{2015} \cdot \frac{1,14^3}{\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3}.$$

По условию в 2018 году производство зерна на душу населения в странах A и B стало одинаковым. Значит,

$$A_{2015} \cdot 1,2^3 = B_{2015} \cdot \frac{1,14^3}{\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{m}{100}\right)^3 = \frac{B_{2015} \cdot 1,14^3}{A_{2015} \cdot 1,2^3}.$$

Подставим значения A_{2015} и B_{2015} , получим:

$$\left(1 + \frac{m}{100}\right)^3 = \frac{375 \cdot 1,14^3}{192 \cdot 1,2^3} = \frac{5^3 \cdot 3 \cdot 1,14^3}{4^3 \cdot 3 \cdot 1,2^3} = \left(\frac{5 \cdot 1,14}{4 \cdot 1,2}\right)^3 = 1,1875^3.$$

Следовательно, $1 + \frac{m}{100} = 1,1875$, откуда $m = 18,75$.

Ответ: 18,75.

№ 14.

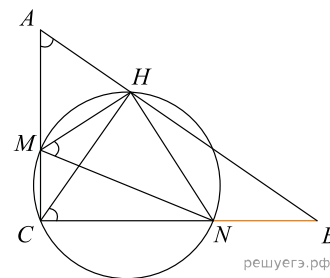
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0

Решение. а) Заметим, что сумма углов MHN и MCN равна 180° , поэтому четырехугольник $CMHN$ вписан в окружность. Углы HMN и HCN равны как вписанные. Углы HCN и CAB равны, потому что каждый из них равен $90^\circ - \angle ABC$. Таким образом, треугольники HMN и CAB подобны по двум углам. Что и требовалось доказать.

б) Заметим, что $\angle CMH = 180^\circ - \angle CNH = \angle BNH$, а $\angle MCH = 90^\circ - \angle A = \angle B$. Поэтому треугольники CMH и BNH подобны по двум углам, причем из пункта а) следует, что

$$\frac{CM}{BN} = \frac{MH}{HN} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

Из этой цепочки равенств получаем, что $BN = 2$.



Ответ: 2.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Подкоренное выражение имеет вид $(x-1)(a-x)$. ОДЗ неравенства определяется условием $(x-1)(x-a) \leq 0$. При $a = 1$ неравенство определено в единственной точке, этот случай не подходит; при $a \neq 1$ ОДЗ задается отрезком между точками 1 и a на числовой прямой. Для того, чтобы среди решений неравенства нашлись 2 числа, разность между которыми равна 4, ОДЗ должна быть отрезком длины не меньше 4, откуда $a \leq -3$ или $a \geq 5$.

При $a \geq 5$ решениями неравенства являются, например, числа 1 и 5, разность между ними равна 4.

При $a \leq -3$ меньший из корней будет не больше -3 . Но в таком случае множитель в скобках отрицателен, а потому требуется, чтобы выполнялось $\sqrt{ax+x-x^2-a} = 0$. Отсюда следует, что меньший корень равен a , а больший — $a+4$. Условию задачи удовлетворяют значения a такие, что

$$-2 \leq a+4 \leq 1 \Leftrightarrow -6 \leq a \leq -3.$$

Ответ: $[-6; -3] \cup [5; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Пусть в первом отделе товаров суммарной ценой $90x$, во втором y товаров суммарной ценой $120y$ и в третьем $200 - x - y$ товаров суммарной ценой $100(200 - x - y)$. Суммарная цена всех товаров равна $200 \cdot 110 = 22000$ рублей. Получаем уравнение:

$$\begin{aligned}
 90x + 120y + 100(200 - x - y) &= 22000 \Leftrightarrow 90x + 120y + 20000 - 100x - 100y = 22000 \Leftrightarrow 90x + 120y + 100(200 - x - y) = 22000 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 90x + 120y + 20000 - 100x - 100y = 22000 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow 20y - 10x = 2000 \Leftrightarrow 2y - x = 200.
 \end{aligned}$$

а) Если $x = y$, то уравнение примет вид $2x - x = 200 \Leftrightarrow x = 200$, что невозможно, так как тогда в третьем отделе будет отрицательное количество товаров.

б) Из уравнения $2y - x = 200$ следует, что $x = 2y - 200$. Если к тому же $200 - x - y = y + 14$, то

$$200 - 2y + 200 - y = y + 14 \Leftrightarrow 4y = 386,$$

и y — нецелое.

в) Ясно, что наибольшая цена будет во втором отделе. Далее, если в нем есть как минимум два товара ценой больше 101 рубля, то можно понизить цену дешевого до 101 руб. и поднять на столько же цену дорогого. Продолжая эти действия, мы только увеличим цену самого дорогого товара. Его итоговая цена будет равна $120y - 101(y - 1) = 19y + 101$, поэтому выгодно сделать y как можно больше. С другой стороны,

$$0 \leq 200 - x - y = 200 - 2y + 200 - y = 400 - 3y, \text{ откуда } y \leq 133.$$

Значит, оптимальным вариантом будет взять 133 дорогих товара, из них 132 стоят по 101 рублю, а последний стоит $19 \cdot 133 + 101 = 2628$ руб., 66 дешевых (например, все по 90 руб.) и один товар за 100 руб. При этом все условия будут выполнены.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 2628.