

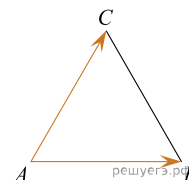
Вариант 181

№ 1.

В ромбе $ABCD$ угол ABC равен 122° ; . Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.

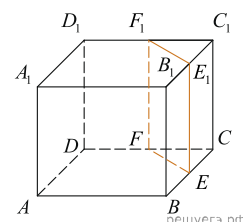
№ 2.

Стороны правильного треугольника ABC равны $2\sqrt{3}$. Найдите длину вектора $\vec{AB} + \vec{AC}$.



№ 3.

Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 2. Найдите объём куба.



№ 4.

В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

№ 5.

В городе 48 % взрослого населения — мужчины. Пенсионеры составляют 12,6 % взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15 %. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

№ 6.

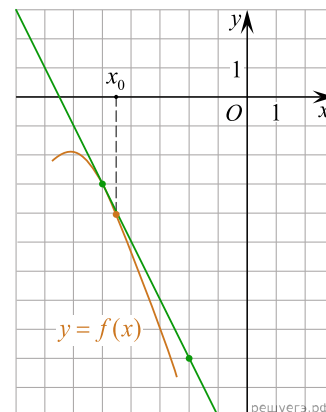
Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{5-2x}} = \frac{1}{3}$.

№ 7.

Найдите $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,8$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

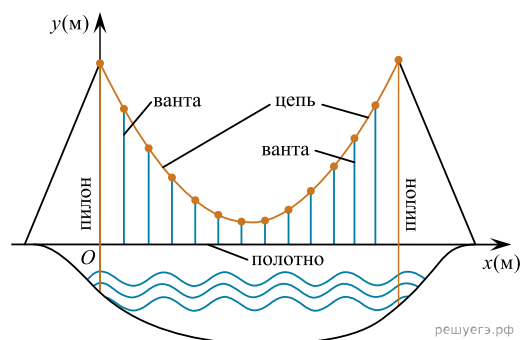


№ 9.

На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые связывают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,005x^2 - 0,74x + 25$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 30 метрах от пилон. Ответ дайте в метрах.

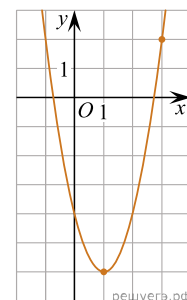


№ 10.

На изготовление 99 деталей первый рабочий тратит на 2 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 110 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 1 деталь больше, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 - 4x + c$. Найдите $f(-3)$.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = 8 \ln(x+7) - 8x + 3$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{\sin^3 x \cdot \cos 3x + \cos^3 x \cdot \sin 3x}{|\sin 2x|} = \frac{3}{4}$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 4\pi]$.

№ 14.

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C . Диагонали боковых граней AA_1B_1B и BB_1C_1C равны 15 и 9 соответственно, $AB = 13$.

а) Докажите, что треугольник BA_1C_1 прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды AA_1C_1B .

№ 15.

Решите неравенство $3^{\log_3(2^x-2)} + 4^x - 18 \leq 0$.

№ 16.

В контейнер упакованы комплектующие изделия трех типов. Стоимость и вес изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определите минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

№ 17.

В треугольнике ABC угол ABC равен 60° . Окружность, вписанная в треугольник, касается стороны AC в точке M .

а) Докажите, что отрезок BM не больше утроенного радиуса вписанной в треугольник окружности.

б) Найдите если известно, что отрезок BM в 2,8 раза больше радиуса вписанной в треугольник окружности.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $2^x - a = \sqrt{4^x - 3a}$ имеет единственный корень.

№ 19.

Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Найдите все p , если $q = 36$.

б) Найдите все q , если $q + 2p = 37$.

в) Найдите все корни уравнения, если $q^3 - p^3 = 3887$.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	282851	29
2	27720	6
3	324459	16
4	1011	0.4
5	509303	0.1
6	77374	-2
7	26784	0.6

8	27505	-2
9	324467	7.3
10	26595	10
11	508919	26
12	77489	-6

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. а) Пусть $\sin x = t + 1$, тогда

$$\begin{aligned} (t+1)^4 + (t-1)^4 = 2 &\Leftrightarrow t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2(t^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0. (t+1)^4 + (t-1)^4 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 + t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2t^4 + 12t^2 = 0 \Leftrightarrow 2t^2(t^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $[4\pi; 5\pi]$, с помощью двойного неравенства:

$$\begin{aligned} 4\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 5\pi &\Leftrightarrow 3,5\pi \leq 2\pi k \leq 4,5\pi \Leftrightarrow 1,75 \leq k \leq 2,25 \Leftrightarrow k = 2. 4\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 5\pi \Leftrightarrow 3,5\pi \leq 2\pi k \leq 4,5\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1,75 \leq k \leq 2,25 \Leftrightarrow k = 2. \end{aligned}$$

Тогда $\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot 2 = 4,5\pi$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $4,5\pi$.

Приведём другое решение пункта а):

$$\begin{aligned} \sin^4 x + (\sin x - 2)^4 = 2 &\Leftrightarrow \sin^4 x + \sin^4 x - 4 \cdot 2 \cdot \sin^3 x + 6 \cdot 2^2 \cdot \sin^2 x - 4 \cdot 2^3 \cdot \sin x + 2^4 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin^4 x - 4 \sin^3 x + 12 \sin^2 x - 16 \sin x + 7 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sin x - 1)(\sin^3 x - 3 \sin^2 x + 9 \sin x - 7) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)^2(\sin^2 x - 2 \sin x + 7) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sin x - 1)^2((\sin x - 1)^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости BB_1C_1 , поскольку она перпендикулярна прямым C_1B_1 и CC_1 . Значит, прямые A_1C_1 и BC_1 перпендикулярны.

б) Пусть V — объём призмы $ABCA_1B_1C_1$. Тогда объём треугольной пирамиды C_1ABC равен $\frac{V}{3}$, поскольку её высота CC_1 и основание ABC совпадают с высотой и основанием призмы соответственно. Аналогично объём треугольной пирамиды $BA_1B_1C_1$ равен $\frac{V}{3}$. Призма $ABCA_1B_1C_1$ составлена из трёх пирамид: $BA_1B_1C_1$, C_1ABC и AA_1C_1B . Значит, объём пирамиды AA_1C_1B равен $\frac{V}{3}$.

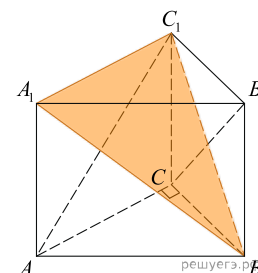
В призме $ABCA_1B_1C_1$

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B^2 - BC_1^2} = 12, \quad B_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1C_1^2} = 5,$$

$$CC_1 = \sqrt{CB_1^2 - B_1C_1^2} = 2\sqrt{14}, \quad V = CC_1 \cdot \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{2} = 60\sqrt{14}.$$

Таким образом, объём пирамиды AA_1C_1B равен $20\sqrt{14}$.

Ответ: б) $20\sqrt{14}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек. ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Неравенство определено, если $2^x - 2 > 0$, то есть при $x > 1$. Преобразуем при этом ограничении:

$$\begin{aligned}
 3^{\log_3(2^x-2)} + 4^x - 18 &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2 + 4^x - 18 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 2^x - 20 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 4)(2^x + 5) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 4, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2. \quad 3^{\log_3(2^x-2)} + 4^x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2 + 4^x - 18 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 2^x - 20 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 4)(2^x + 5) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 4, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2. \quad 3^{\log_3(2^x-2)} + 4^x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 2 + 4^x - 18 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 2^x - 20 \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 4)(2^x + 5) \leq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq 4, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x \leq 2.
 \end{aligned}$$

Ответ: $(1; 2]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть в контейнере находятся x изделий первого типа, y изделий второго типа и z изделий третьего типа, тогда верно равенство

$$12x + 16y + 15z = 326. \quad (*)$$

Правая часть полученного уравнения делится на 2, значит, и левая часть должна делиться на 2. Поэтому z — чётное число. Кроме того, заметим, что $\frac{600}{15} > \frac{400}{12} > \frac{500}{16}$, значит, изделия третьего типа имеют самую большую удельную цену (цена на 1 кг изделия), а изделия второго типа — самую маленькую.

Наибольшая суммарная стоимость находящихся в контейнере изделий будет соответствовать решению уравнения (*) в натуральных числах при наибольшем количестве самых дорогих изделий z . Если $z \geq 22$, то $15z \geq 330$, а значит, уравнение (*) не имеет решений в натуральных числах. Будем проверять чётные числа, меньшие 22, в порядке убывания. Если $z = 20$, то $12x + 16y = 26$ — это уравнение не имеет решений в натуральных числах. Если $z = 18$, то $12x + 16y = 56$, полученное уравнение имеет единственное решение $x = y = 2$. Следовательно, наибольшая суммарная стоимость находящихся в контейнере изделий равна

$$S_{\max} = 400 \cdot 2 + 500 \cdot 2 + 600 \cdot 18 = 12\,600 \text{ тыс. руб.}$$

Наименьшая суммарная стоимость находящихся в контейнере изделий будет соответствовать решению уравнения (*) в натуральных числах при наибольшем количестве самых дешёвых изделий y . Если $y \geq 20$, $z \geq 2$ то $16y + 15z \geq 340$, а значит, уравнение (*) не имеет решений в натуральных числах. Проверим значения y , меньшие 20. Если $y = 19$, то $12x + 15z = 22$ — нет решений в натуральных числах. Если $y = 18$, то $12x + 15z = 38$ — нет решений в натуральных числах. Если $y = 17$, то $12x + 15z = 54$, — есть единственное решение $x = z = 2$. Следовательно, наименьшая суммарная стоимость находящихся в контейнере изделий равна

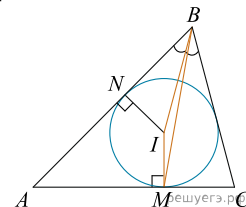
$$S_{\min} = 400 \cdot 2 + 500 \cdot 17 + 600 \cdot 2 = 10\,500 \text{ (тыс. руб.)}$$

Ответ: 10,5 млн руб. и 12,6 млн руб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Пусть окружность касается стороны AB в точке N , точка I — центр вписанной окружности. Точка I лежит на биссектрисе угла ABC , значит, BI — биссектриса угла ABC и $IM \perp BC$. Следовательно, по неравенству треугольника



где отрезок IM — радиус окружности. Что и требовалось доказать.

б) Пусть радиус вписанной окружности равен r . Следовательно, $IM = r$. По теореме косинусов для треугольника BIM получаем:

Таким образом,

Ответ: б) $\frac{121}{140}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
Найдено множество значений a , корни, соответствующие единственному значению параметра не определены ИЛИ Найдены корни, но в множество значений a не включены одна или две граничные точки.	3
Найдено множество значений a , но не включены одна или две граничные точки. Корни, соответствующие единственному значению параметра не найдены.	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Пусть $2^x = t$, $E(t) = (0; +\infty)$.
Имеем:

$$\sqrt{t^2 - 3a} = t - a \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq a, \\ t^2 - 3a = t^2 - 2at + a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq a, \\ a = 0, \\ t = \frac{1}{2}(a+3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ t \geq 0, \\ \frac{1}{2}(a+3) \geq a, \\ t = \frac{1}{2}(a+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ t \geq 0, \\ a \leq 3, \\ t = \frac{1}{2}(a+3). \end{cases}$$

$t > 0$, поэтому получаем: если $a = 0$, то $t > 0$; если $-3 < a \leq 3$, то $t = \frac{a+3}{2}$. Поскольку при $a = 0$ решением являются все положительные значения t , уравнение имеет единственное решение, если $a \in (-3; 0) \cup (0; 3]$.

Ответ: $a \in (-3; 0) \cup (0; 3]$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3

Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ	2
обоснованно получен верный ответ в пункте в) Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) По теореме Виета 36 является произведением этих двух корней, что дает варианты 1·36, 2·18, 3·12, 4·9. В каждом случае p отличается знаком от суммы корней, что дает варианты -37, -20, -15, -13.

б) Пусть корни уравнения равны x_1 и x_2 , тогда получаем:

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) = 37,$$

$$x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = 41,$$

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = 41.$$

Поскольку 41 простое число, одна из скобок равна 1, а другая 41 (при натуральных x_1, x_2 они не могут быть равны -41). Значит, корни уравнения — числа 3 и 43, тогда $q = 3 \cdot 43 = 129$.

в) Перепишем условие в виде $(q - p)(p^2 + pq + q^2) = 13^2 \cdot 23$ и заметим, что $q > 0, p < 0$. Кроме того, поскольку

$$16^3 = 4096 > 3887 = q^3 - p^3 > q^3$$

и

$$16^3 = 4096 > 3887 = q^3 - p^3 > -p^3,$$

получаем, что $-p, q \leq 15$. Тогда $q - p \leq 30$.

Если $q - p = 13$, то

$$13 \cdot 23 = p^2 + pq + q^2 = (p - q)^2 + 3pq < (p - q)^2 = 13^2,$$

что невозможно. Значит,

$$q - p = 23,$$

$$13^2 = p^2 + pq + q^2 = (p - q)^2 + 3pq = 23^2 + 3pq,$$

откуда $3pq = 13^2 - 23^2 = -360$ и $pq = -120$.

По теореме Виета, зная, что $q + (-p) = 23$ и $q(-p) = 120$, можно угадать такие числа и других чисел не будет. Числа 8 и 15 подходят. Значит, $p = -8, q = 15$ (что дает корни 3 и 5) или $p = -15, q = 8$ (что не дает целых корней).

Ответ: а) -37, -20, -15, -13; б) 129; в) 3 и 5.