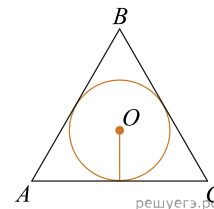


Вариант 184

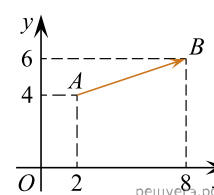
№ 1.

Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{\sqrt{3}}{6}$.
Найдите сторону этого треугольника.



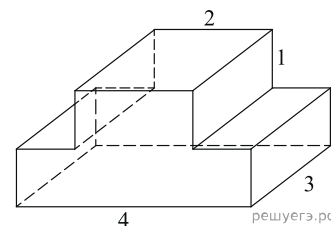
№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{AB}$.



№ 3.

Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

В праздничном наборе 100 шариков: 10 красных, 20 синих, остальные желтые и зеленые, их поровну. Какова вероятность того, что из набора достали один шарик синего или желтого цвета?

№ 5.

Телефон передаёт SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,4. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

№ 6.

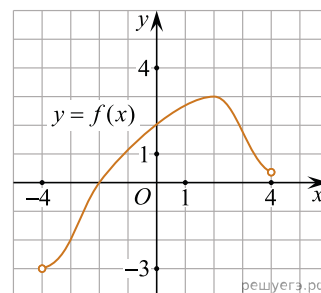
Решите уравнение $6^{x+1} - 6^x = 180$.

№ 7.

Найдите значение выражения $7^{\frac{4}{9}} \cdot 49^{\frac{5}{18}}$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 4)$. Найдите корень уравнения $f'(x) = 0$.



№ 9.

Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле

$$R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m},$$

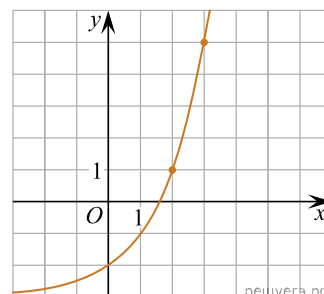
где $m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}$, $r_{\text{экс}}$ — средняя оценка, данная экспертами, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка, данная покупателями, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 24, их средняя оценка равна 0,86, а оценка экспертов равна 0,11.

№ 10.

Игорь и Паша красят забор за 9 часов. Паша и Володя красят этот же забор за 12 часов, а Володя и Игорь — за 18 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(6)$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$ на отрезке $[-3; 3]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\lg^2 x + 5 \lg x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

№ 14.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки F , K , L — середины ребер AA_1 , $A_1 D_1$, $B_1 C_1$ соответственно, точка O — центр грани $CC_1 D_1 D$. Отрезок MM с концами на прямых AD и KL соответственно пересекает прямую FQ и перпендикулярен ей.

а) Докажите, что $AM:MD = 5:1$.

б) Найдите длину отрезка MM , если сторона куба равна 3.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} - \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$.

№ 16.

5 января 2020 года Андрей планирует открыть вклад на сумму 3 миллиона рублей. Первые три года 2 января банк будет начислять 10% на сумму вклада, а в последующие годы банк будет начислять 5% на сумму вклада.

4 января каждого года Андрей будет делать дополнительный взнос на вклад так, чтобы после этого величина вклада на 5 января была больше величины вклада на 5 января прошлого года на одно и то же число. Определите общий размер начислений банка, если 3 января 2031 года на вкладе будет лежать 24,15 миллиона рублей.

№ 17.

В треугольнике ABC биссектриса AD пересекает высоту BH в точке O . Прямая CO перпендикулярна AD и пересекает AB в точке M , причем $MB = MO$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 60^\circ$.

б) Найдите BC , если радиус окружности, вписанной в треугольник ABC равен $3\sqrt{3}$.

№ 18.

Найти все значения параметра α ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$), при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos \alpha - \sin \alpha) - 3x^2 \sin 2\alpha$ на отрезке $[-\sin \alpha; \cos \alpha]$ принимает наименьшее значение.

№ 19.

В игре число $a=4$ и число $b=5$, за ход можно сделать $(a-1; b+2)$ или $(a+2; b-1)$. (новые числа a и b всегда положительные).

а) Можно ли получить число 200 за 100 ходов?

б) Сколько нужно сделать ходов, чтобы получить сумму равную 300.

в) Сколько нужно сделать ходов, чтобы получить максимальную сумму, при этом ни одно число не превышает 200.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27910	1
2	27664	40
3	27193	18
4	672740	0.55

5	508808	0.64
6	676849	2
7	26740	7
8	562751	2
9	317097	0.71
10	99616	8
11	509089	61
12	77449	-13

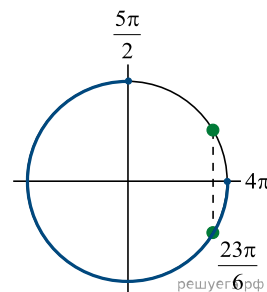
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Имеем:

$$2(2\cos^2 x - 1) + 4\sqrt{3}\cos x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 4\sqrt{3}\cos x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности (см. рис.) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Получим точку $\frac{23\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{23\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с исполь- зованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, при- ведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть отрезок MN пересекает прямую PQ в точке E . Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рисунке. Тогда в выбранной системе отсчета верны следующие координаты:

$$P\left(0; 0; \frac{3}{2}\right),$$

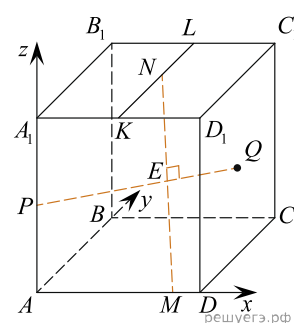
$$Q\left(3; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right),$$

$$M(\lambda; 0; 0),$$

$$N\left(\frac{3}{2}; \mu; 3\right),$$

$$\vec{PQ} = \left(3; \frac{3}{2}; 0\right),$$

$$\vec{MN} = \left(\frac{3}{2} - \lambda; \mu; 3\right).$$



Из условия перпендикулярности отрезка MN и прямой PQ получаем

$$\begin{aligned} \vec{PQ} \cdot \vec{MN} = 0 &\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) + \frac{3}{2}\mu = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 2\lambda - 3. \\ \vec{PQ} \cdot \vec{MN} = 0 &\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{2} - \lambda\right) + \frac{3}{2}\mu = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 2\lambda - 3. \end{aligned}$$

Кроме того, отрезок MN и прямая PQ пересекаются, поэтому $\vec{PQ} = a \cdot \vec{PN} + b \cdot \vec{PM}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, откуда

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \mu = 2\lambda - 3, \\ 3 = \frac{3}{2}a + b\lambda, \\ \frac{3}{2} = a\mu + 0b, \\ 0 = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2\lambda - 3, \\ 3 = \frac{3}{2}a + a\lambda, \\ \mu = \frac{3}{2a}, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2\lambda - 3, \\ \lambda = \frac{3}{a} - \frac{3}{2}, \\ \mu = \frac{3}{2a}, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2a} = \frac{6}{a} - 3 - 3, \\ \lambda = \frac{3}{a} - \frac{3}{2}, \\ \mu = \frac{3}{2a}, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{4}{a} - 4, \\ \lambda = \frac{3}{a} - \frac{3}{2}, \\ \mu = \frac{3}{2a}, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}, \\ \lambda = \frac{5}{2}, \\ \mu = 2, \\ b = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2\lambda - 3, \\ 3 = \frac{3}{2}a + b\lambda, \\ \frac{3}{2} = a\mu + 0b, \\ 0 = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2\lambda - 3, \\ 3 = \frac{3}{2}a + a\lambda, \\ \mu = \frac{3}{2a}, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2\lambda - 3, \\ \lambda = \frac{3}{a} - \frac{3}{2}, \\ \mu = \frac{3}{2a}, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2a} = \frac{6}{a} - 3 - 3, \\ \lambda = \frac{3}{a} - \frac{3}{2}, \\ \mu = \frac{3}{2a}, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{4}{a} - 4, \\ \lambda = \frac{3}{a} - \frac{3}{2}, \\ \mu = \frac{3}{2a}, \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4}, \\ \lambda = \frac{5}{2}, \\ \mu = 2, \\ b = \frac{3}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$AM : MD = \lambda : (3 - \lambda) = \frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5 : 1.$$

б) Из пункта а) напрямую следует, что

$$MN^2 = \left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 + \mu^2 + 3^2 = (-1)^2 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

откуда $MN = \sqrt{14}$.

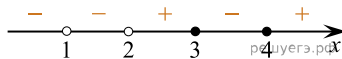
Ответ: б) $\sqrt{14}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, или получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} - \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 4)(x - 2)}{x - 1} - \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2(x - 4) - (x - 4)}{(x - 2)(x - 1)} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 1} - \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x - 4)(x - 2)}{x - 1} - \frac{x - 4}{(x - 2)(x - 1)} &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x - 2)^2(x - 4) - (x - 4)}{(x - 2)(x - 1)} &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{((x - 2)^2 - 1)(x - 4)}{(x - 2)(x - 1)} &\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 4)}{(x - 2)(x - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - 3)(x - 4)}{x - 2} \leq 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{((x - 2)^2 - 1)(x - 4)}{(x - 2)(x - 1)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(x - 1)(x - 3)(x - 4)}{(x - 2)(x - 1)} &\leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - 3)(x - 4)}{x - 2} \leq 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$



Множество решений исходного неравенства: $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup [3; 4]$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup [3; 4]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. 2 января 2031 года банк увеличит сумму вклада на 5%, после чего на вкладе окажется 24,15 миллиона рублей. Тогда 5 января 2030 года сумма вклада составляла $\frac{24,15}{1,05} = 23$ млн руб. По условию, величина вклада на 5 января была больше величины вклада на 5 января прошлого года на одно и то же число и за 10 лет выросла на 20млнруб., значит, каждый год величина вклада увеличивалась на 2млнруб. Заполним таблицу.

Год	Величина вклада 2 января, после начисления процентов, млн руб.	Величина вклада 5 января, млн руб.
2020		3
2021	$3 + 3 \cdot 0,10$	5
2022	$5 + 5 \cdot 0,10$	7
2023	$7 + 7 \cdot 0,10$	9
2024	$9 + 9 \cdot 0,05$	11
2025	$11 + 11 \cdot 0,05$	13
...	...	...
2030	$21 + 21 \cdot 0,05$	23
2031	$23 + 23 \cdot 0,05 = 24,15$	

Суммируя величины ежегодных начислений, указанные в первом столбце таблицы, находим общий размер начислений банка:

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,10 + 7 \cdot 0,10 + 9 \cdot 0,05 + 11 \cdot 0,05 + 13 \cdot 0,05 + \dots + 21 \cdot 0,05 + 23 \cdot 0,05 = 3 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,10 + 7 \cdot 0,10 + 9 \cdot 0,05 + 11 \cdot 0,05 + \\
 & \quad + 13 \cdot 0,05 + \dots + 21 \cdot 0,05 + 23 \cdot 0,05 = 3 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,10 + 7 \cdot 0,10 + \\
 & \quad + 9 \cdot 0,05 + 11 \cdot 0,05 + 13 \cdot 0,05 + \\
 & \quad + \dots + 21 \cdot 0,05 + 23 \cdot 0,05 = \\
 & = 1,5 + \frac{9+23}{2} \cdot 8 \cdot 0,05 = 1,5 + 6,4 = 7,9 \text{ млн руб.}
 \end{aligned}$$

Ответ: 7,9млнруб.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) В треугольнике MAC прямая AO является биссектрисой и высотой, а потому и медианой. Треугольник MAC — равнобедренный по признаку, поэтому $NO = OC$, $AN = AC$. Отметим на стороне AB точку M такую, что прямая MO параллельна прямой AC . Тогда треугольник BOH — прямоугольный, поэтому медиана MO делит его на два равнобедренных треугольника MNO и NOB , откуда $MN = NO = NB$. Отрезок MO — средняя линия треугольника ABC , следовательно, $AM = MN$ и $AN = NC$. Но $AN = AC$, значит, треугольник ABC — равносторонний. Таким образом, $\angle BAC = 60^\circ$.

б) Пусть $AC = 2x$, тогда $AB = 3x$. По теореме косинусов для треугольника ABC получаем:

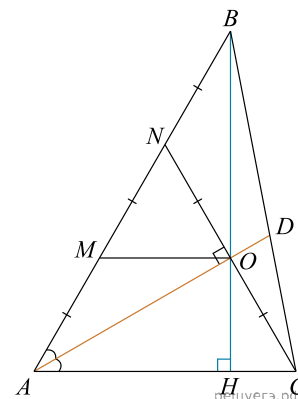
$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} = \sqrt{4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{13x^2 - 6x^2} = x\sqrt{7}.$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} =$$

$$= \sqrt{4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{13x^2 - 6x^2} = x\sqrt{7}. BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC} =$$

$$= \sqrt{4x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3x \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{13x^2 - 6x^2} = x\sqrt{7}.$$



Площадь треугольника ABC равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot AB \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 3x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2}.$$

Найдем радиус вписанной в треугольник окружности:

$$r = \frac{S}{p} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{2} : \frac{2x + 3x + x\sqrt{7}}{2} = \frac{3\sqrt{3}x^2}{5x + x\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}x}{5 + \sqrt{7}}.$$

Таким образом,

$$\frac{3\sqrt{3}x}{5 + \sqrt{7}} = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{5 + \sqrt{7}} = 1 \Leftrightarrow x = 5 + \sqrt{7},$$

откуда $BC = (5 + \sqrt{7}) \cdot \sqrt{7} = 5\sqrt{7} + 7$.

Ответ: б) $5\sqrt{7} + 7$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a . ИЛИ Установлено, что исходное уравнение при всех значениях a имеет единственное решение.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Наименьшее значение эта функция принимает либо в нулях производной, либо в одном из концов отрезка. Найдем производную:

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2(\cos \alpha - \sin \alpha) - 12x \cos \alpha \sin \alpha = 12x(x + \cos \alpha)(x - \sin \alpha), f'(x) = 12x^3 + 12x^2(\cos \alpha - \sin \alpha) - 12x \cos \alpha \sin \alpha =$$

$$= 12x(x + \cos \alpha)(x - \sin \alpha),$$

поэтому нули производной равны $0, \sin \alpha, -\cos \alpha$.

Если $\alpha = 0$, то производная имеет вид $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x + 1)$, корни производной суть числа 0 и -1 . Отрезок $[-\sin \alpha; \cos \alpha]$ становится отрезком $[0; 1]$, на нем функция f возрастает. Наименьшее значение достигается на левой границе отрезка. (*)

Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то $0 < \sin \alpha < \cos \alpha$, а $-\cos \alpha$ не лежит на отрезке $[-\sin \alpha; \cos \alpha]$. В этом случае имеем следующее расположение знаков производной:

Интервал	$(-\sin \alpha; 0)$	$(0; \sin \alpha)$	$(\sin \alpha; \cos \alpha)$
знак $f'(x)$	+	-	+

Наименьшего значения функция достигает либо на левой границе отрезка, либо в точке $\sin \alpha$. (**)

Если $\alpha = \pi/4$, то производная имеет вид $f'(x) = 12x\pi(x + \sqrt{2}/2)(x - \sqrt{2}/2)$. Отрезок $[-\sin \alpha; \cos \alpha]$ становится отрезком $[-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$, на нем функция имеет единственный корень производной — число 0 . Это точка максимума, поэтому наименьшее значение достигается или на левой границе отрезка, или на правой границе. Эти значения равны, будем считать, что наименьшее значение достигается на левой границе (***).

Объединяя случаи (*), (**) и (***) получаем, что если $\alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]$, то ее наименьшее значение равно наименьшему из значений $f(-\sin \alpha)$ и $f(\sin \alpha)$. Имеем:

$$\begin{aligned} f(-\sin \alpha) &= 3 \sin^4 \alpha - 4 \sin^3 \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) - 3 - \sin^2 \alpha \sin 2\alpha = 7 \sin^4 \alpha - 10 \sin^3 \alpha \cos \alpha, \\ f(-\sin \alpha) &= 3 \sin^4 \alpha - 4 \sin^3 \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) - 3 - \sin^2 \alpha \sin 2\alpha = \\ &= 7 \sin^4 \alpha - 10 \sin^3 \alpha \cos \alpha, \quad f(-\sin \alpha) = \\ &= 3 \sin^4 \alpha - 4 \sin^3 \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) - 3 - \sin^2 \alpha \sin 2\alpha = \\ &= 7 \sin^4 \alpha - 10 \sin^3 \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\sin \alpha) &= 3 \sin^4 \alpha + 4 \sin^3 \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) - 3 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha = -\sin^4 \alpha - 2 \sin^3 \alpha \cos \alpha, \quad f(\sin \alpha) = 3 \sin^4 \alpha + 4 \sin^3 \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) - 3 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha = \\ &= -\sin^4 \alpha - 2 \sin^3 \alpha \cos \alpha, \quad f(\sin \alpha) = \\ &= 3 \sin^4 \alpha + 4 \sin^3 \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha) - 3 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha = \\ &= -\sin^4 \alpha - 2 \sin^3 \alpha \cos \alpha. \end{aligned}$$

Рассмотрим разность найденных значений на отрезке $[0; \frac{\pi}{4}]$:

$$\begin{aligned} f(-\sin \alpha) - f(\sin \alpha) &= 8 \sin^4 \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cos \alpha = 8 \sin^3 \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha) \leq 0, \quad f(-\sin \alpha) - f(\sin \alpha) = 8 \sin^4 \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cos \alpha = \\ &= 8 \sin^3 \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha) \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\min(f(-\sin \alpha), f(\sin \alpha)) = f(-\sin \alpha) = 7 \sin^4 \alpha - 10 \sin^3 \alpha \cos \alpha. \quad (1)$$

Если $\frac{\pi}{4} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то $-\sin \alpha < -\cos \alpha < 0 \leq \cos \alpha$, а $\sin \alpha$ не лежит на указанном отрезке. Рассуждая аналогично, находим, что если $\alpha \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$, то функция убывает на $[-\sin \alpha; -\cos \alpha]$ и на $[0; \cos \alpha]$. Проведя аналогичные вычисления, можно получить, что ее наименьшее значение равно

$$\min(f(-\cos \alpha), f(\cos \alpha)) = f(\cos \alpha) = 7 \cos^4 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin \alpha. \quad (2)$$

Осталось исследовать наименьшие значения (1) и (2) на соответствующих отрезках и найти наименьшее из них. Однако поскольку при замене $\alpha \mapsto \frac{\pi}{2} - \alpha$ функции переходят друг в друга, достаточно будет исследовать одну из них. Иными словами, поскольку для всех α из отрезка $[0; \frac{\pi}{4}]$ верно равенство $\varphi(\alpha) = \varphi(\pi/2 - \alpha)$, достаточно найти наименьшее значение функции $\varphi(\alpha) = 7 \sin^4 \alpha - 10 \sin^3 \alpha \cos \alpha$ на промежутке $[0; \frac{\pi}{4}]$.

Исследуем производную функции на интервале $(0; \frac{\pi}{4})$:

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) &= 28 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 10 \sin^4 \alpha - 30 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 14 \operatorname{tg} \alpha - 15), \quad \varphi'(\alpha) = 28 \sin^3 \alpha \cos \alpha + 10 \sin^4 \alpha - 30 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 14 \operatorname{tg} \alpha - 15). \end{aligned}$$

Решениями уравнения $5 \operatorname{tg}^2 \alpha + 14 \operatorname{tg} \alpha - 15 = 0$ являются числа $\arctg \frac{-7 + 2\sqrt{31}}{5} + \pi n$ и $\frac{-7 - 2\sqrt{31}}{5} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. На интервале $(0; \frac{\pi}{4})$ значения тангенса положительны и меньше 1, поэтому в него входит только корень $\alpha_0 = \arctg \frac{2\sqrt{31} - 7}{5}$.

На интервале $(0; \alpha_0)$ производная $\varphi'(\alpha)$ отрицательна, на интервале $(\alpha_0; \pi/4)$ положительна.

Следовательно, функция $\varphi(\alpha)$ убывает на отрезке $[0; \alpha_0]$ и возрастает на отрезке $[\alpha_0; \pi/4]$. Поэтому наименьшее значение $\varphi(\alpha)$ на отрезке $[\alpha_0; \pi/4]$ достигается в точке α_0 . Такое же наименьшее значение $\varphi(\alpha)$ принимает и в точке $\frac{\pi}{2} - \alpha_0$, принадлежащей отрезку $[\pi/4; \pi/2]$.

Итак, наименьшее значение достигается в точках $\arctg \frac{2\sqrt{31}-7}{5}$ и $\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2\sqrt{31}-7}{5}$.

Примечание РЕШУ ЕГЭ.

Это задание из вступительного экзамена в Московский государственный университет несколько сложнее других.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Поскольку $A+2+B-1=A+B+1$, с каждым ходом сумма чисел будет возрастать на 1.

а) После 100 ходов сумма станет $4+5+100 < 200$, значит, второе число пары не будет натуральным. Это запрещено.

б) Понадобится $300 - (4+5) = 291$ ход. Такая ситуация возможна, если каждый раз на роль уменьшаемого выбирать большее из двух чисел, — если оно равно 1, то оба числа должны быть единицами, что невозможно, поскольку сумма чисел постоянно растет и в самом начале равна $4+5 > 1+1$.

в) Заметим, что разность между числами за один ход всегда меняется на 3. Была равна $A-B$, а станет равна

$$(A+2)-(B-1)=(A-B)+3 \quad \text{или} \quad (A-1)-(B+2)=(A-B)-3.$$

Изначально эта разность равна $5-4=1$ и не кратна трем, поэтому она никогда не станет равна нулю. Значит, сделать числа 200 и 200 не получится.

Поэтому сумма двух этих чисел будет не больше $199+200=399$ и будет сделано не более $399-9=390$ ходов. Сделать столько ходов можно например так— 195 раза повторить пару ходов

$$(x, x+1) \mapsto (x+2, x) \mapsto (x+1, x+2),$$

увеличивающую оба числа на 1, если наибольшее не превосходило 199.

Ответ: а) нет; б) 291; в) 390.