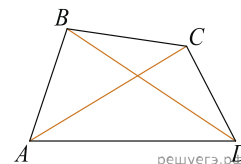


Вариант 185

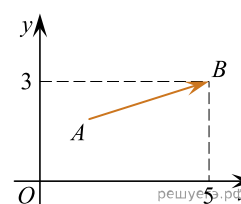
№ 1.

Диагонали четырехугольника равны 4 и 5. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника.



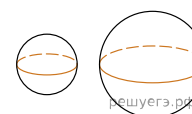
№ 2.

Вектор $\vec{AB}$ с концом в точке $B(5; 3)$ имеет координаты $(3; 1)$. Найдите ординату точки A .



№ 3.

Даны два шара. Радиус первого шара в 2 раза больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



№ 4.

В соревнованиях по толканию ядра участвуют 4 спортсмена из Финляндии, 7 спортсменов из Дании, 9 спортсменов из Швеции и 5 из Норвегии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Швеции.

№ 5.

При изготовлении подшипников диаметром 67 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше чем на 0,01 мм, равна 0,965. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше чем 66,99 мм или больше чем 67,01 мм.

№ 6.

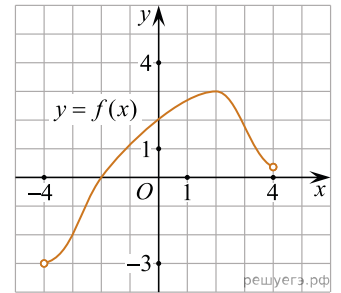
Найдите корень уравнения $\log_5(5 - x) = 2\log_5 3$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{9axy - (-7xya)}{4yax}$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 4)$. Найдите корень уравнения $f'(x) = 0$.



№ 9.

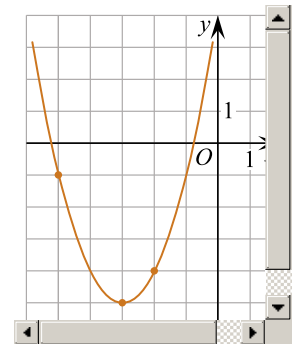
Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1 V_1^{1,4} = p_2 V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

№ 10.

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 60 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 400 метрам, за 1 минуту. Найдите длину поезда в метрах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.



№ 12.

Найдите точку максимума функции $y = x^5 + 15x^3 - 260x$.

№ 13.

- Решите уравнение $0,5 \sin^2 6x - \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} - 3x \right) = 0$.
- Найдите все корни уравнения, принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

№ 14.

Дана прямая призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Основание призмы — ромб с острым углом $A = 60^\circ$.

а) Докажите, что $AD_1 = DB_1$.

б) Найдите угол между плоскостью $AC_1 B$ и плоскостью ABD , если высота призмы равна 5, а ребро основания равно 4.

№ 15.

Решите неравенство: $\log_{625x} 25 \cdot \log_{0,2}^2(25x) \leq 2$.

№ 16.

В июне 2023 года Валерий Анатольевич планирует взять кредит на сумму 709800 рублей на 4 года (последняя выплата запланирована в 2027 году). Условия его возврата таковы:

- в январе 2024 и 2025 годов долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2026 и 2027 годов долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по апрель необходимо выплатить часть долга (одну и ту же сумму каждый год);
- к маю 2027 года долг должен быть полностью погашен.

Определите размер ежегодной годовой выплаты в рублях.

№ 17.

Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q .

а) Докажите, что отрезки PQ и OC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника OBC , если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2m$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{y^2 - xy - 7y + 5x + 10}{\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{6-y}} = 0, \\ 4a = ax - y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№ 19.

Коля записал уравнение $x^2 + bx + c = 0$, которое имеет 2 различных натуральных корня x_1 и x_2 (b и c — некоторые числа). Петя записал уравнение $x^2 + dx + e = 0$, которое имеет 2 различных натуральных корня x_3 и x_4 (d и e — некоторые числа). Маша посмотрела на уравнения Коли и Пети и записала уравнение $2x^2 + (b+d)x + c+e = 0$.

а) Возможно ли, что уравнение Маши не имеет корней?

б) Возможно ли, что уравнение Маши имеет два различных корня и ровно один из них натуральный, если среди чисел x_1, x_2, x_3, x_4 ровно два — нечетны?

в) Известно, что $b = d$ и $|x_1 - x_2| > |x_3 - x_4|$, а уравнение Маши имеет два различных натуральных корня. Найдите наименьшее возможное значение $|x_1 - x_2|$.

Ответы

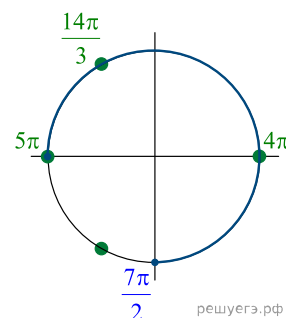
Номер	Задание	Ответ
1	27845	9
2	27728	2
3	27072	4
4	282858	0,36
5	320196	0,035
6	26659	-4
7	26812	4
8	562751	2
9	525114	8
10	99609	600
11	508935	31
12	628748	-2

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Используя формулу приведения $\sin(x - \pi) = -\sin x$ и формулу синуса двойного угла $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, получаем:

$$\begin{aligned}
 \sin 2x - \sin(x - \pi) &= 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin x (2 \cos x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases} \\
 \sin 2x - \sin(x - \pi) &= 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \sin x (2 \cos x + 1) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, \end{cases}
 \end{aligned}$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$. Получим числа: $4\pi; \frac{14\pi}{3}; 5\pi$.

Ответ: а) $\left\{ \pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $4\pi; \frac{14\pi}{3}; 5\pi$.

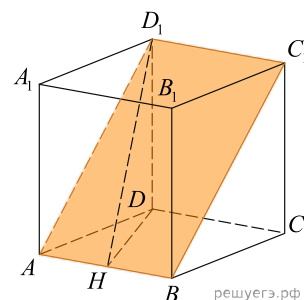
№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из условия следует, что треугольник ABD равнобедренный с углом 60° градусов, а следовательно, равносторонний. Тогда, по теореме Пифагора получаем, что $AD_1^2 = AD^2 + DD_1^2 = BD^2 + BB_1^2 = DB_1^2$. Отсюда отрезки AD_1 и BD_1 равны.

б) Построим сечение призмы плоскостью AC_1B . Получим параллелограмм ABC_1D_1 . Из точки D проведём перпендикуляр DH к прямой AB . Тогда по теореме о трех перпендикулярах $D_1H \perp AB$. Плоский угол DHD_1 — искомый. $DH = AD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, следовательно,

$$\operatorname{tg} \angle DHD_1 = \frac{DD_1}{DH} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$



Ответ: $\arctg \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство, используя свойства логарифмов:

$$\begin{aligned} \log_{625x} 25 \cdot \log_{0,2}^2(25x) \leq 2 &\Leftrightarrow \frac{\log_5 25 \cdot \log_5^2(25x)}{\log_5 625x} \leq 2. \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2 + \log_5 x)^2}{4 + \log_5 x} \leq 2. \log_{625x} 25 \cdot \log_{0,2}^2(25x) \leq 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\log_5 25 \cdot \log_5^2(25x)}{\log_5 625x} \leq 2. \Leftrightarrow \frac{2 \cdot (2 + \log_5 x)^2}{4 + \log_5 x} \leq 2. \end{aligned}$$

Положим, $t = \log_5 x$, получим:

$$\frac{(2+t)^2}{4+t} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4+4t+t^2-4-t}{4+t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+3t}{4+t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t+3)t}{4+t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -4, \\ -3 \leq t \leq 0. \end{cases} \frac{(2+t)^2}{4+t} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4+4t+t^2-4-t}{4+t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+3t}{4+t} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(t+3)t}{4+t} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t < -4, \\ -3 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Вернемся к исходной переменной, находим:

$$\begin{cases} \log_5 x < -4, \\ -3 \leq \log_5 x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{625}, \\ \frac{1}{125} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{625}\right) \cup \left[\frac{1}{125}; 1\right]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть размер ежегодной выплаты составит x рублей, тогда можно составить уравнение:

$$(((709800 \cdot 1,2 - x) \cdot 1,2 - x) \cdot 1,25 - x) \cdot 1,25 - x = 0.$$

Переведем десятичные дроби в обыкновенные и раскроем скобки:

$$\begin{aligned} & 709800 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 x - \left(\frac{5}{4}\right)^2 x - \frac{5}{4}x - x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 709800 \cdot \frac{9}{4} - x \cdot \frac{30+25+20+16}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 709800 \cdot \frac{9 \cdot 16}{4 \cdot 91} \Leftrightarrow x = 7800 \cdot 9 \cdot 4 \Leftrightarrow x = 280800. \\ & 709800 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{6}{5} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 x - \left(\frac{5}{4}\right)^2 x - \frac{5}{4}x - x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & 709800 \cdot \frac{9}{4} - x \cdot \frac{30+25+20+16}{16} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & x = 709800 \cdot \frac{9 \cdot 16}{4 \cdot 91} \Leftrightarrow x = 7800 \cdot 9 \cdot 4 \Leftrightarrow x = 280800. \end{aligned}$$

Ответ: 280 800 рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Пусть отрезок BD — высота данного треугольника. Тогда $O \in BD$ в силу того, что ABC — равнобедренный треугольник. Введем следующие обозначения: $\angle BCO = \angle DCO = \alpha$, $\angle COP = x$, $\angle OPQ = y$. Прямоугольные треугольники BOP и BCD подобны, следовательно, $\angle BOP = 2\alpha$. Из прямоугольного треугольника OPC находим $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а из равнобедренного треугольника OPQ находим $y = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Углы COP и OPQ — накрест лежащие при пересечении прямых PQ и OC секущей OP , значит, отрезки PQ и OC параллельны, что и требовалось доказать.

б) Отрезок CO — биссектриса треугольника BCD . Следовательно,

$$\frac{DC}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{3},$$

откуда $BC = 3DC = 3m$.

$CP = DC = m$, значит, $BP = 2m$ и, следовательно,

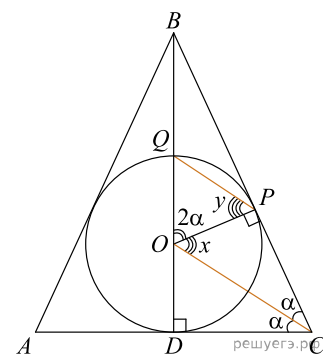
$$S_{\triangle BPO} = 2S_{\triangle CPO} = 2S_{\triangle CDO},$$

откуда $S_{\triangle OBC} = \frac{3}{4}S_{\triangle BCD} = \frac{3}{8}S_{\triangle ABC}$. По формуле Герона находим:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{4m \cdot 2m \cdot m \cdot m} = 2m^2\sqrt{2},$$

откуда $S_{\triangle OBC} = \frac{3m^2\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{3m^2\sqrt{2}}{4}$.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1

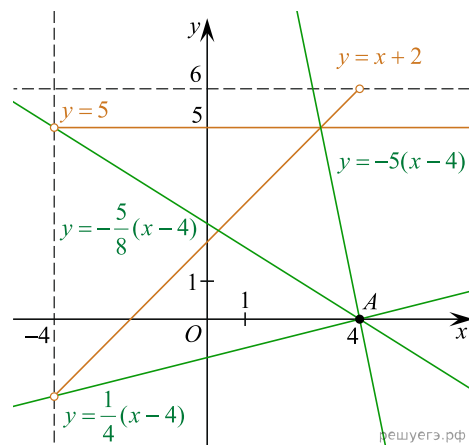
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Запишем первое уравнение системы в виде

$$\frac{(y-5)(y-2-x)}{\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{6-y}} = 0.$$

При $x \leq -4$ и $y \geq 6$ левая часть не имеет смысла. При $x > -4$ и $y < 6$ уравнение задает части прямых $y = 5$ и $y = x + 2$ (см.рис.). Графиком уравнения второго уравнения исходной системы $y = a(x-4)$ является пучок прямых, проходящих через точку $A(4;0)$. Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямых $y = 5$ и $y = x + 2$ с прямой $y = a(x-4)$ при условии $x > -4$ и $y < 6$.

При $x > -4$ прямая $y = a(x-4)$ пересекает прямую $y = 5$, если $a < -\frac{5}{8}$ или если $a > 0$. При $x > -4$ и $y < 6$ прямая $y = a(x-4)$ пересекает прямую $y = x + 2$, если $a < \frac{1}{4}$. При $a = -5$ прямая $y = a(x-4)$ проходит через точку пересечения прямых $y = 5$ и $y = x + 2$.



Таким образом, исходная система имеет единственное решение при $a = -5$, при $-\frac{5}{8} \leq a \leq 0$ и при $a \geq \frac{1}{4}$.

Ответ: $\{-5\} \cup \left[-\frac{5}{8}; 0\right] \cup \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ ~~обоснованно получен верный ответ в пункте в)~~	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Да. Пусть Коля записал уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, а Петя — уравнение $x^2 - 12x + 35 = 0$. Тогда Машино уравнение будет $2x^2 - 16x + 38 = 0$, его дискриминант равен

$$16^2 - 4 \cdot 2 \cdot 38 = 16(16 - 19) < 0.$$

При этом Колино уравнение имеет корни 1 и 3, а Петино — корни 5 и 7.

б) Нет. Заметим, что сумма корней Машиного уравнения по теореме Виета равна

$$-\frac{b+d}{2} = -\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2},$$

и это целое число (в числителе два четных и два нечетных слагаемых). Кроме того, произведение корней равно

$$\frac{c+e}{2} = \frac{x_1x_2+x_3x_4}{2} > 0,$$

поэтому второй корень не только целый, но и натуральный.

в) Обозначим корни Колиного уравнения за $-\frac{b}{2} \pm t$, Петиного за $-\frac{b}{2} \pm y$ и Машиного, деленного на 2, за $-\frac{b}{2} + z$. Для уравнения $x^2 + bx + \frac{e+c}{2} = 0$ по теореме Виета получим:

$$\frac{b^2}{4} - t^2 = c,$$

$$\frac{b^2}{4} - y^2 = e,$$

$$\frac{b^2}{4} - z^2 = \frac{e+c}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{b^2}{4} - t^2 + \frac{b^2}{4} - y^2 = 2\left(\frac{b^2}{4} - z^2\right) \Leftrightarrow t^2 + y^2 = 2z^2.$$

При этом разности между корнями Колиного и Петиного уравнения равны $2t$ и $2y$, причем $2x > 2y$. Требуется найти наименьшее значение t . Заметим, что $7^2 + 1^2 = 2 \cdot 5^2$. Перебирая числа, меньшие 7, выясняем, что для них решений у этого уравнения нет. Значит, $t \geq 7$. Для уравнений $x^2 - 20x + 51$ и $x^2 - 20x + 99$ Машино уравнение примет вид $2x^2 - 40x + 150$ и имеет корни 5 и 15, а сами они имеют корни (3; 17) и (9; 11). Значит, значение $2t = 14$ действительно достигается.

Ответ: а) да; б) нет; в) 14.
