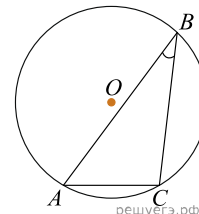


Вариант 2

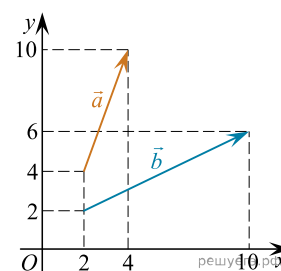
№ 1.

Найдите хорду, на которую опирается угол 30° , вписанный в окружность радиуса 3.



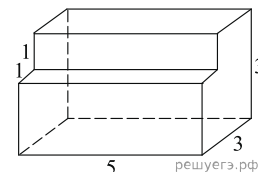
№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



№ 4.

В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

№ 5.

В аэропорту два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,3. Такова же вероятность, что чай закончится во втором автомате. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,13. Найдите вероятность того, что к концу дня в одном из автоматов чай закончится, а в другом — нет.

№ 6.

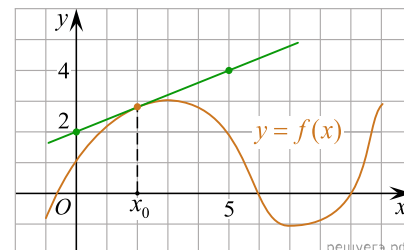
Найдите корень уравнения: $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3+x} = 512$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\sqrt{3}\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sqrt{3}\sin^2\frac{5\pi}{12}$.

№ 8.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке $x_0 = 2$. Найдите значение производной функции $g(x) = x^2 - f(x) + 1$ в точке x_0 .



№ 9.

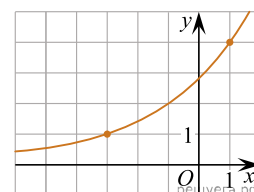
При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

№ 10.

Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 16$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-10; -1]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA , точка K — середина ребра SB . Кроме того известно, что $SC = 6$, $BC = 4$.

- Докажите, что BMC — равнобедренный, остроугольный треугольник.
- Найдите угол между плоскостями CMK и ABC .

№ 15.

Решите неравенство $\frac{\log_{6-x}(x^2 - 2x + 1)}{\log_3(x-1) - 2} \geq 0$.

№ 16.

В июле 2026 года Андрей планирует открыть накопительный счёт на три года. Условия по этом счёту таковы:

- 1 июля 2026 года Андрей помещает на счёт 819 000 рублей;
- 30 июня сумма на счёте увеличивается на 20 % по сравнению с суммой, находящейся на счёте 29 июня;
- 1 июля 2027, 2028, 2029 годов Андрей снимает со счёта одну и ту же фиксированную сумму;
- 1 июля 2029 года на счёте не должно остаться денег.

Найдите сумму, которую должен будет снимать со счёта Андрей каждый год.

№ 17.

В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол BCD — тупой. Через точку B проведена прямая, параллельная прямой CD и пересекающая прямую AD в точке E . На продолжении BE за точку E отмечена точка F такая, что $DE = DF$.

- Докажите, что точки A , F , C и D лежат на одной окружности.
- Найдите расстояние от точки C до прямой AF , если $BD = 10$ и $\cos \angle ADC = 0,6$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} > 0$$

выполняется для любых значений x .

№ 19.

На доске написано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырех или семи чисел из записанных является целым числом.

- Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 567 и 1414?
- Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом другого, если среди записанных на доске чисел есть число 567?
- Известно, что среди записанных на доске чисел есть число n и его квадрат n^2 . Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27858	3

2	27737	200
3	25561	76
4	282855	0,25
5	320452	0,34
6	26670	0
7	245170	-1,5
8	525689	3,6
9	27983	180000
10	26583	16
11	509107	5
12	77470	-10

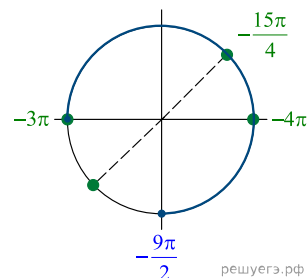
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Применим формулу приведения, разложим на множители:

$$2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sin 2x \Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



б) Отберем корни при помощи единичной тригонометрической окружности (см. рис.). Отрезку удовлетворяют корни: -4π , $-\frac{15\pi}{4}$, -3π .

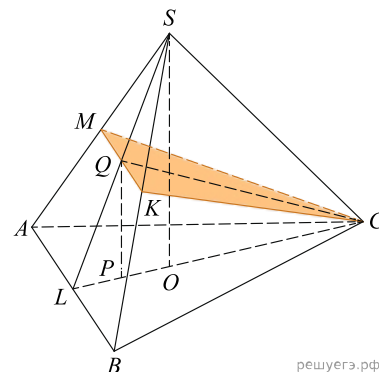
Ответ: а) $\left\{ \pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) -4π , $-\frac{15\pi}{4}$, -3π .

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ	

при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,	1
ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Боковые грани правильной пирамиды - равные равнобедренные треугольники. Поэтому в них равны медианы, проведенные к боковым сторонам: BM и CM . Из треугольника SAB получаем, что $\cos \angle A = 2/6 = 1/3$. Тогда, по теореме косинусов, $BM^2 = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1/3 = 17$. Отсюда $BM = CM = \sqrt{17} > 4$. Получается, что основание равнобедренного треугольника BMC меньше его боковой стороны, значит, угол при вершине острый. Угол же при основании равнобедренного треугольника всегда острый. Отсюда получаем требуемое.



б) Отрезок MK — средняя линия треугольника SAB , следовательно, $MK \parallel AB$. Значит, через MK можно провести плоскость параллельную плоскости ABC и, так как $MK \subset CMK$, MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC .

Треугольник CMK — равнобедренный. Проведем перпендикуляр CQ к MK , Q — середина MK . Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на CL — медиане треугольника ABC , P — середина LO . $CL \perp AB$, следовательно, $CL \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Таким образом, $\angle QCP$ — линейный угол искомого угла.

Далее находим:

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{23}{3}}.$$

$$\text{Откуда } QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{\frac{23}{3}}, \quad CL = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Поскольку } CP = \frac{5}{6}CL = \frac{5}{3}\sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}, \text{ имеем: } \operatorname{tg} \angle QCP = \frac{\sqrt{23} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{\sqrt{23}}{5}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{23}}{5}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Запишем число 2 в виде $\log_3 9$ и применим метод рационализации:

$$\frac{\log_{6-x}(x^2 - 2x + 1)}{\log_3(x-1) - \log_3 9} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(6-x-1)(3-1)(x-1-9)} \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ 6-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-2)}{(5-x)(x-10)} \geq 0, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{5-x} \leq 0, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 5, \end{cases} \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ 5 < x < 6. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-2)}{(5-x)(x-10)} \geq 0, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{5-x} \leq 0, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 5, \\ 1 < x < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \leq 2, \\ 5 < x < 6. \end{cases}$$

Ответ: $(1; 2] \cup (5; 6)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть x — сумма, которую Андрей ежегодно снимает со счета, S — сумма, на которую был открыт накопительный счет.

1 июля 2027 года после начисления процентов и снятия хрублей на счете будет сумма, равная $1,2S - x$.

1 июля 2028 года после начисления процентов и снятия хрублей на счете будет сумма, равная $1,2(1,2S - x) - x$.

1 июля 2029 года после начисления процентов и снятия хрублей на счете будет сумма, равная $1,2(1,2(1,2S - x) - x) - x$.

Так как 1 июля 2029 года на счете не должно остаться денег, получаем уравнение:

$$1,2(1,2(1,2S - x) - x) - x = 0 \Leftrightarrow 1,2(1,44S - 2,2x) - x = 0 \Leftrightarrow 1,728S - 3,64x = 0.$$

Так как $S = 819000$, находим x :

$$1,728 \cdot 819000 - 3,64x = 0 \Leftrightarrow 3,64x = 1415232 \Leftrightarrow x = 388800.$$

Ответ: 388 800 рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Четырёхугольник $BCDE$ — параллелограмм, поэтому $CD = BE = AB$, $BC = ED = DF$. В треугольниках ABE и EDF углы при основании равны, а потому $\angle ABE = \angle EDF$. Углы BCA и CAD равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых секущей. Кроме того,

$$\angle FDC = \angle FDE + \angle EDC = \angle ABE + \angle EBC = \angle ABC,$$

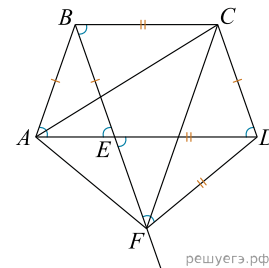
то есть треугольники ABC и CDF равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle BCA = \angle CFD$, тогда

$\angle CAD = \angle CFD$. Следовательно, точки A, F, C и D лежат на одной окружности.

б) Из доказанного в пункте а) следует, что $\angle ADC = \angle AFC$ и $AC = FC$. В равнобедренной трапеции диагонали равны, то есть $AC = BD$. Тогда искомое расстояние равно

$$FC \cdot \sin \angle AFC = BD \cdot \sin \angle ADC = 10 \cdot \sqrt{1 - 0,6^2} = 10 \cdot 0,8 = 8.$$

Ответ: б) 8.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения, ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений, ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что

$$\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} > 0 &\Leftrightarrow \log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - a - 4}{5} > 0 \quad \log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - a - 4}{5} > 0 \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая. Если основание логарифма больше 1, то есть если

$$\frac{-2a-13}{5} > 1 \Leftrightarrow a < -9,$$

то

$$\frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - a - 4}{5} > 1 \Leftrightarrow 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) > 9 + a.$$

Для любых значений x верно неравенство $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \geq -2$, поэтому исходное неравенство выполняется для любых значений x при выполнении условий

$$\begin{cases} a < -9, \\ -2 > 9 + a \end{cases} \Leftrightarrow a < -11.$$

Если же основание логарифма больше 0, но меньше 1, то есть при

$$0 < \frac{-2a-13}{5} < 1 \Leftrightarrow -9 < a < -\frac{13}{2},$$

то

$$0 < \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - a - 4}{5} < 1 \Leftrightarrow 4 + a < 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) < 9 + a.$$

Для любых значений x верно двойное неравенство $-2 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$, поэтому исходное неравенство выполняется для любых значений x , если

$$\begin{cases} -9 < a < -\frac{13}{2}, \\ 2 < 9 + a, \\ 4 + a < -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 < a < -\frac{13}{2}, \\ a > -7, \\ a < -6 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < a < -\frac{13}{2}.$$

Объединяя результаты двух случаев, получаем, что исходное неравенство выполняется для любых значений x при $a < -11$ или при $-7 < a < -\frac{13}{2}$.

Ответ: $(-\infty; -11) \cup \left(-7; -\frac{13}{2}\right)$.

Это же решение можно записать несколько иначе (Виктор Кошелев).

Заметим, что $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Тогда:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2a-13}{5} > 1, \\ \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - a - 4}{5} > 1, \\ 0 < \frac{-2a-13}{5} < 1, \\ 0 < \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - a - 4}{5} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a < -9, \\ a < -9 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ -9 < a < -\frac{13}{2}, \\ -9 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < a < -4 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right). \end{cases} \log_{\frac{-2a-13}{5}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x - a - 4}{5} > 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2a-13}{5} > 1, \\ \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - a - 4}{5} > 1, \\ 0 < \frac{-2a-13}{5} < 1, \\ 0 < \frac{2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - a - 4}{5} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a < -9, \\ a < -9 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ -9 < a < -\frac{13}{2}, \\ -9 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < a < -4 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Наименьшее значение функции $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ равно -2 , а наибольшее значение равно 2 . Значит, в случае $a < -9$ неравенство $a < -9 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ выполняется для любых значений x , если и только если $a < -9 - 2$.

В случае $-9 < a < -\frac{13}{2}$ неравенство

$$-9 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) < a < -4 + 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

выполняется для любых значений x , если и только если $-9 + 2 < a < -4 - 2$.

Окончательно получаем:

$$\begin{cases} a < -9, \\ a < -9 - 2, \\ -9 < a < -\frac{13}{2}, \\ -9 + 2 < a < -4 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -11, \\ -7 < a < -\frac{13}{2}. \end{cases}$$

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4

Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Любые два написанных числа дают одинаковые остатки от деления на 4 или 7: если взять три или шесть других чисел и добавить к ним одно из этих двух, то в обоих случаях сумма будет кратна 4 или 7, значит, у заменяющих друг друга чисел одинаковые остатки. Следовательно, разность любых двух написанных чисел кратна 4 и 7, а потому и их наименьшему общему кратному — числу 28. Значит, все числа дают одинаковые остатки от деления на 28. Напротив, если у всех чисел остатки одинаковы, то сумма четырех или семи из них будет кратна 4 или 7.

а) Число 567 при делении на 28 дает остаток 7, а число 1414 — остаток 14, поэтому они не подходят.

б) Заметим, что квадраты четных чисел кратны 4, а квадраты нечетных представимы в виде $(4x \pm 1)^2 = 16x^2 \pm 8x + 1$. Следовательно, n^2 не может при делении на 4 давать остаток 3, а именно такой остаток дает число 567.

в) Нужно, чтобы n^2 и n давали одинаковые остатки при делении на 28, то есть чтобы $n^2 - n = n(n - 1)$ было кратно 28. Число 1 является наименьшим натуральным числом и удовлетворяет этому условию. В качестве остальных девяти чисел можно взять числа

1,

$$29 = 28 \cdot 1 + 1,$$

$$57 = 29 \cdot 2 + 1,$$

$$85 = 29 \cdot 3 + 1$$

...,

дающие при делении на 28 остаток 1.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 1.

Примечание.

Проверяющим ЕГЭ экспертам были присланы решения, подразумевающие, что число и его квадрат должны быть различными. В этом случае наименьшим искомым числом является 8. Приведем соответствующее рассуждение.

в) Нужно, чтобы n^2 и n давали одинаковые остатки при делении на 28, то есть чтобы $n^2 - n = n(n - 1)$ было кратно 28. Один из множителей должен быть кратен 7. Число 1 не подходит, поскольку рано своему квадрату. При $n = 7$ произведение равно 42, оно не кратно 28. При $n = 8$ произведение равно 56, оно подходит. Значит, наименьшее подходящее n равно 8. В качестве примера можно взять числа 8, 64 и любые другие 8 чисел, дающие при делении на 28 остаток 8.

Отметим также, что в Москве единицу в пункте в) эксперты засчитывали как верный ответ, а в Вологде неукоснительно следовали присланным решениям и не засчитывали. И на апелляции не засчитали. См. также обсуждение в комментариях ниже.