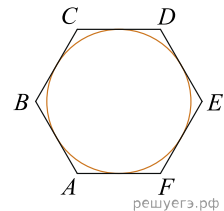


Вариант 204

№ 1.

Найдите радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной $\sqrt{3}$.



№ 2.

Длина вектора $\vec{a}$ равна $2\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45° , а скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно 12. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

№ 3.

Конус с радиусом 3 и образующей 6 вписан в шар. Найдите площадь поверхности шара, делённую на π .

№ 4.

При производстве в среднем на каждые 2982 исправных насоса приходится 18 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

№ 5.

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

№ 6.

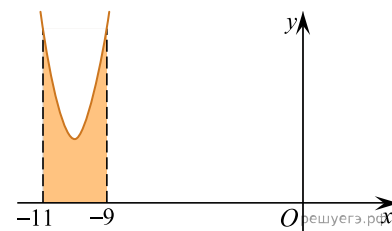
Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x} = -x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{5}}$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



№ 9.

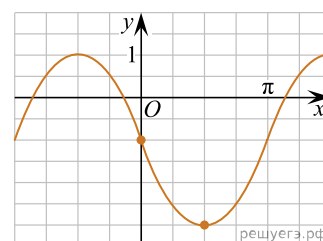
Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 5000 \text{ км/ч}^2$. Скорость вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь в км. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разогнится до скорости 100 км/ч .

№ 10.

Бова и Гоша решают задачи. За час Бова может решить на две задачи больше, чем Гоша (при этом оба за час решают целое количество задач). Известно, что вместе они решат 33 задачи на 1 час 15 минут быстрее, чем это сделал бы один Бова. За какое время Гоша может решить 20 задач? Ответ дайте в часах.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \sin x + b$, где a и b — целые числа. Найдите $y\left(\frac{25\pi}{6}\right)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 8 \ln(x+7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6.5; 0]$.

№ 13.

- Решите уравнение $\sqrt{x+4} = x^2 - 4$.
- Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

№ 14.

Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении $AK:KB=3:1$. Точка L — середина ребра BC . Плоскость α проходит через точки K и L и пересекает ребра B_1C_1 и A_1B_1 в точках M и N соответственно. Известно, что $B_1M:MC_1=3:1$.

- Докажите, что $MN \perp AB$.
- Найдите угол между плоскостью α и плоскостью основания призмы, если все рёбра призмы равны.

№ 15.

Решите неравенство $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$.

№ 16.

Буратино и папа Карло планировали положить свои капиталы на общий счет в банк «Навроде» под 500% годовых, рассчитывая через год забрать вклад величиной 5. Крах банка изменил их планы. Буратино подарил часть своих золотых папе Карло, а остальные положил в банк «Обирон», даже не поинтересовавшись процентной ставкой. Папа Карло присоединил полученные золотые к своему капиталу и сделал вклад в банк «Вампириал» под 50% годовых. Ровно через год они забрали свои вклады. Оказалось, что папа Карло получил $\frac{5}{6}$, а Буратино в три раза меньше. Какой процент годовых дает банк «Обирион»?

№ 17.

В окружности с центром O проведена хорда AB , на которой выбрана точка M . Вторая окружность, описанная около треугольника MAO , повторно пересекает первую окружность в точке K .

а) Докажите, что $BM = MK$.

б) Найдите площадь треугольника OMK , если $OM = 11$ и $BK = 12$.

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{9x^4 + 4x^2(5x+2) - a(2x^2 - a)} = 3x^2 + 4x - a$$

имеет ровно три различных корня.

№ 19.

Составим две последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$:

$a_1 = 1$, $a_n = \frac{n}{p}$ ($n > 1$), где p — наименьший простой делитель числа n ;

$b_1 = 1$, b_n ($n > 1$) — количество таких чисел m , для которых $a_m = n$. Оно показывает, сколько раз число n встречается в последовательности $\{a_n\}$.

а) Найдите b_{187} .

б) Для каких чисел $n > 1$ и $m > 1$ выполняется равенство $b_n = b_m$?

в) Чему равно b_m , если $m = 8n^3 + 12n^2 - 2n - 3$?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27917	1,5
2	649918	6
3	676846	48
4	282856	0,006
5	320188	0,32
6	26668	-9

7	26746	2
8	323079	6
9	27987	1
10	501213	2
11	676931	-2
12	26717	51

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Решение. а) Уравнение имеет решения, только если $x^2 - 4 \geq 0$, то есть при $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Положим $y = \sqrt{x+4}$ и при этом ограничении систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+4}, \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x+4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$$

Заменим первое уравнение системы суммой первого и второго уравнений, находим:

$$\begin{aligned} y^2 + y = x^2 + x &\Leftrightarrow y^2 - x^2 + y - x = 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ y = -x-1. \end{cases} \\ y^2 + y = x^2 + x &\Leftrightarrow y^2 - x^2 + y - x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y-x)(y+x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x, \\ y = -x-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставив найденные выражения для y во второе уравнение системы, получим совокупность:

$$\begin{cases} x = x^2 - 4, \\ -x - 1 = x^2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 4 = 0, \\ x^2 + x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{cases}$$

Поскольку $4 < \sqrt{17} < 5$, то

$$-2 < \frac{1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

и

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{2} > 2,$$

то есть $x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$. Из оценки $3 < \sqrt{13} < 4$ получаем

$$0 < \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} < 2$$

и

$$\frac{-1 - \sqrt{13}}{2} < -2,$$

то есть $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$.

б) Из п. а) следует, что

$$\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -2 < 0 < \frac{1+\sqrt{17}}{2} < 3.$$

Поэтому на отрезке $[-2; 3]$ лежит только корень $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \right\}$; б) $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Приведём другое решение пункта а):

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4}+4=x^2 &\Leftrightarrow \sqrt{x+4}+4+x+\frac{1}{4}=x^2+x+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x+4}-x)(\sqrt{x+4}+x+1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4}=x, \\ \sqrt{x+4}=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=x^2, \\ x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \\ x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=(x+1)^2, \\ -x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Приведём ещё одно решение пункта а):

$$\sqrt{x+4}=x^2-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=x^4-8x^2+4^2, \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^2-(2x^2+1) \cdot 4+x^4-x=0, \\ x^2-4 \geq 0. \end{cases}$$

Решим уравнение, как квадратное относительно 4:

$$4^2-(2x^2+1) \cdot 4+x^4-x=0 \Leftrightarrow 4 = \frac{2x^2+1 \pm \sqrt{(2x^2+1)^2-4 \cdot (x^4-x)}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x^2+x+1, \\ 4 = x^2-x. \end{cases}$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} 4 = x^2+x+1, \\ 4 = x^2-x \\ x^2-4 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x = x^2-4, \\ x = x^2-4 \\ x^2-4 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-3=0, \\ x \leq -1 \\ x^2-x-4=0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \\ x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

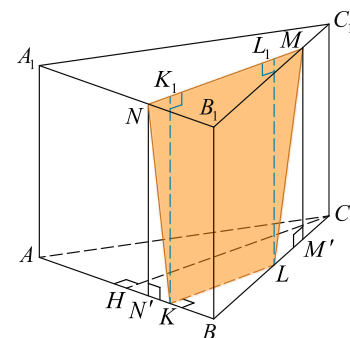
№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а), или при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, или обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка H — середина ребра AB , тогда прямая CH перпендикулярна этому ребру. Отрезок KL — средняя линия треугольника CHB , значит, он параллелен прямой CH , а следовательно, также перпендикулярен ребру AB . Плоскость α пересекает плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ по параллельным прямым, значит, прямые MM' и KL параллельны. А если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна третьей прямой, то и вторая ей перпендикулярна.

б) Пусть $AB = 8x$. Пусть также точки M' и N' — проекции точек M и N на плоскость основания призмы. Тогда эти точки — середины отрезков LC и NK соответственно. Заметим, что $KB = 2x$, а потому $HK = 8x - 6x = 2x$ и $N'K = x$. Из прямоугольных треугольников $NN'K$, $MM'L$, LKB и $MM'B_1$ соответственно получаем:



решуегэ.рф

$$NK = \sqrt{64x^2 + x^2} = \sqrt{65}x,$$

$$ML = \sqrt{64x^2 + 4x^2} = \sqrt{68}x = 2\sqrt{17}x,$$

$$KL = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = \sqrt{12}x = 2\sqrt{3}x,$$

$$NM = N'M' = \sqrt{36x^2 - 9x^2} = \sqrt{27}x = 3\sqrt{3}x.$$

Найдем площадь трапеции $KLM'N'$:

$$\begin{aligned} S_{KLM'N'} &= S_{N'BM'} - S_{KBL} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 6x \cdot 3x - \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 4x \cdot 2x = \frac{9\sqrt{3}}{2}x^2 - 2\sqrt{3}x^2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}x^2. \\ S_{KLM'N'} &= S_{N'BM'} - S_{KBL} = \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 6x \cdot 3x - \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 4x \cdot 2x = \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2}x^2 - 2\sqrt{3}x^2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}x^2. \quad S_{KLM'N'} = S_{N'BM'} - S_{KBL} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 6x \cdot 3x - \frac{1}{2} \cdot \sin 60^\circ \cdot 4x \cdot 2x = \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2}x^2 - 2\sqrt{3}x^2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}x^2. \end{aligned}$$

Пусть $L_1M = t$, тогда в трапеции $KLMN$ равны высоты:

$$\begin{aligned} 68x^2 - t^2 &= 65x^2 - (3\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x - t)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = t^2 - (\sqrt{3}x - t)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 &= t^2 - 3x^2 + 2\sqrt{3}xt - t^2 \Leftrightarrow 6x^2 = 2\sqrt{3}xt \Leftrightarrow 3x = \sqrt{3}t \Leftrightarrow t = \sqrt{3}x. \quad 68x^2 - t^2 = 65x^2 - (3\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x - t)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 &= t^2 - (\sqrt{3}x - t)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = t^2 - 3x^2 + 2\sqrt{3}xt - t^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6x^2 &= 2\sqrt{3}xt \Leftrightarrow 3x = \sqrt{3}t \Leftrightarrow t = \sqrt{3}x. \quad 68x^2 - t^2 = 65x^2 - (3\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x - t)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 &= t^2 - (\sqrt{3}x - t)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x^2 &= t^2 - 3x^2 + 2\sqrt{3}xt - t^2 \Leftrightarrow 6x^2 = 2\sqrt{3}xt \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3x &= \sqrt{3}t \Leftrightarrow t = \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

Следовательно, высота этой трапеции равна

$$LL_1 = \sqrt{68x^2 - 3x^2} = \sqrt{65}x,$$

а ее площадь

$$S_{KLMN} = \frac{2\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}x}{2} \cdot \sqrt{65}x = \frac{5\sqrt{195}x^2}{2}.$$

По теореме о площади проекции для искомого угла φ получаем:

$$\cos \varphi = \frac{S_{KLM'N'}}{S_{KLMN}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}x^2}{\frac{5\sqrt{195}}{2}x^2} = \frac{\sqrt{65}}{65},$$

откуда $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{65}}{65}.$

Ответ: 6) $\arccos \frac{\sqrt{65}}{65}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только исключением точек 1 и/или 3. ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть $3^{4x-x^2-1} = t$, тогда

$$t^2 - 36t + 243 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 27)(t - 9) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 9, \\ t \geq 27. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} 3^{4x-x^2-1} \leq 9, \\ 3^{4x-x^2-1} \geq 27 \end{matrix} \right] &\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 4x-x^2-1 \leq 2, \\ 4x-x^2-1 \geq 3 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x^2-4x+3 \geq 0, \\ x^2-4x+4 \leq 0 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} (x-1)(x-3) \geq 0, \\ (x-2)^2 \leq 0 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x = 2, \\ x \geq 3. \end{cases} \left[\begin{matrix} 3^{4x-x^2-1} \leq 9, \\ 3^{4x-x^2-1} \geq 27 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 4x-x^2-1 \leq 2, \\ 4x-x^2-1 \geq 3 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x^2-4x+3 \geq 0, \\ x^2-4x+4 \leq 0 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} (x-1)(x-3) \geq 0, \\ (x-2)^2 \leq 0 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x = 2, \\ x \geq 3. \end{cases} \left[\begin{matrix} 3^{4x-x^2-1} \leq 9, \\ 3^{4x-x^2-1} \geq 27 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} 4x-x^2-1 \leq 2, \\ 4x-x^2-1 \geq 3 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x^2-4x+3 \geq 0, \\ x^2-4x+4 \leq 0 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} (x-1)(x-3) \geq 0, \\ (x-2)^2 \leq 0 \end{matrix} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x = 2, \\ x \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Так как совместный капитал Буратино и папы Карло, увеличенный на 500%, равен $\frac{5}{6}$, капитал Буратино и папы Карло равен $\frac{5}{6}$. Пусть после того, как Буратино подарил часть своих золотых папе Карло, капитал папы стал равен x , тогда капитал Буратино стал равен $\frac{5}{6} - x$. Капитал папы Карло, увеличенный на 50%, равен $\frac{5}{6}$, поэтому $1,5x = \frac{5}{6}$.

откуда $x = \frac{S}{9}$.

После погашения вкладов Буратино получил сумму, вдвое меньшую суммы, которую получил папа Карло, следовательно, он получил $\frac{S}{18}$. Пусть r — процентная ставка, предлагаемая банком «Обирион», $k = 1 + \frac{r}{100}$. Имеем:

$$\left(\frac{S}{6} - x\right)k = \frac{S}{18} \Leftrightarrow \left(\frac{S}{6} - \frac{S}{9}\right)k = \frac{S}{18} \Leftrightarrow \frac{S}{18}k = \frac{S}{18} \Leftrightarrow k = 1,$$

откуда $r = 0$.

Ответ: 0%.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> и использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Угол $\angle AOK$ — центральный угол, опирающийся на дугу $\widehat{AK}$, а угол $\angle ABK$ — вписанный угол, опирающийся на дугу $\widehat{AK}$, следовательно, $\angle AOK = 2\angle ABK$. Во второй окружности углы $\angle AOK$ и $\angle AMK$ являются вписанными, опирающимися на дугу $\widehat{AK}$, следовательно, $\angle AOK = \angle AMK$. Получаем, что $\angle AMK = 2\angle ABK$.

Рассмотрим треугольник BMK . По теореме о внешнем угле треугольника

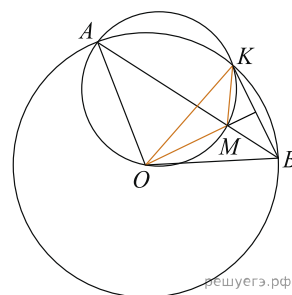
$$\angle MKB = \angle AMK - \angle MBK = 2\angle MBK - \angle MBK = \angle MBK.$$

Отсюда следует, что $MB = MK$.

б) Поскольку $MB = MK$, точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку BK . Отрезки OB и OK равны как радиусы окружности, поэтому точка O также лежит на указанном серединном перпендикуляре. Следовательно, OM — серединный перпендикуляр к отрезку BK , а значит,

$$S_{OKM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{BK}{2} \cdot OM = 33.$$

Ответ: 33.



№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
--	-------

Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения. ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2
В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений. ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. При условии $3x^2 + 4x - a \geq 0$ уравнение равносильно следующим:

$$\begin{aligned}
 & 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = (3x^2 + 4x - a)^2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = 9x^4 + 16x^2 + a^2 + 24x^3 - 6ax^2 - 8ax \Leftrightarrow 4x^3 + 8x^2 - 4ax^2 - 8ax = 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - ax^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2, \ 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = (3x^2 + 4x - a)^2 \Leftrightarrow \\ x=a. \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = 9x^4 + 16x^2 + a^2 + 24x^3 - 6ax^2 - 8ax \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4x^3 + 8x^2 - 4ax^2 - 8ax = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - ax^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2, \ 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = (3x^2 + 4x - a)^2 \Leftrightarrow \\ x=a. \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = 9x^4 + 16x^2 + a^2 + 24x^3 - 6ax^2 - 8ax \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4x^3 + 8x^2 - 4ax^2 - 8ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2, \ 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = (3x^2 + 4x - a)^2 \Leftrightarrow \\ x=a. \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - ax^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow x(x+2)(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2, \ 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = (3x^2 + 4x - a)^2 \Leftrightarrow \\ x=a. \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = 9x^4 + 16x^2 + a^2 + 24x^3 - 6ax^2 - 8ax \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4x^3 + 8x^2 - 4ax^2 - 8ax = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - ax^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2, \ 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = (3x^2 + 4x - a)^2 \Leftrightarrow \\ x=a. \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x(x+2)(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2, \ 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = (3x^2 + 4x - a)^2 \Leftrightarrow \\ x=a. \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow 9x^4 + 20x^3 + 8x^2 - 2ax^2 + a^2 = 9x^4 + 16x^2 + a^2 + 24x^3 - 6ax^2 - 8ax \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 4x^3 + 8x^2 - 4ax^2 - 8ax = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - ax^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2, \\ x=a. \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow x(x+2)(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x=-2, \\ x=a. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $3x^2 + 4x - a \geq 0$. Рассмотрим условия совпадения корней. При $a=0$ и $a=-2$ уравнение имеет не более двух различных корней. При остальных значениях a числа 0, -2, a различны. При $x=0$ получаем $3x^2 + 4x - a = -a$. Это выражение неотрицательно при $a \leq 0$. При $x=-2$ получаем $3x^2 + 4x - a = 4 - a$. Это выражение неотрицательно при $a \leq 4$. При $x=a$ получаем $3x^2 + 4x - a = 3a^2 + 3a$. Это выражение неотрицательно при $a \leq -1$ или $a \geq 0$. Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при $a < -2$ и при $-2 < a \leq -1$.

Ответ: $a < -2, \ -2 < a \leq -1$.

Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Необходимо определить, сколько решений имеет уравнение $\frac{n}{p} = 187$, то есть $n = 11 \cdot 17 \cdot p$, где p — наименьший простой множитель n . Ясно, что $p \leq 11$. Все числа n вида $11 \cdot 17 \cdot p$ при $p = 2, 3, 5, 7, 11$ подходят. Следовательно, $b_{187} = 5$.

б) Пусть $b_m = b_n$. Необходимо определить количество решений уравнения $x = mp$ и $x = np$ с условием, что p — минимальный простой делитель. Заметим, что годятся все числа такого вида при $p = 2, 3, 5, \dots$ до минимального простого делителя m и n включительно. Значит, эти минимальные делители должны совпадать.

в) Имеем произведение трех последовательных нечетных чисел:

$$8n^3 + 12n^2 - 2n - 3 = (2n+3)(4n^2-1) = (2n+3)(2n+1)(2n-1).$$

Одно из них делится на 3. Значит, $\frac{n}{p} = m$ только для $n = 2m$ и $n = 3m$. Поэтому ответ: 2.

Ответ: а) 5; б) для m и n , у которых совпадает наименьший простой делитель; в) 2.
