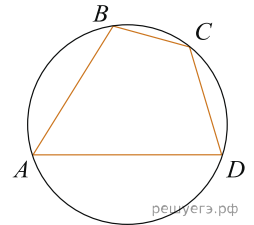


Вариант 209

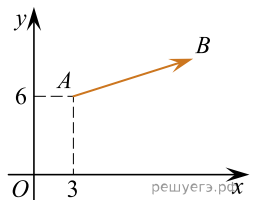
№ 1.

Стороны четырехугольника $ABCD$ AB , BC , CD и AD стягивают дуги описанной окружности, градусные величины которых равны соответственно 95° , 49° , 71° , 145° . Найдите угол B этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



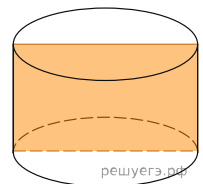
№ 2.

Вектор $\vec{AB}$ началом в точке $A(3;6)$ имеет координаты $(9;3)$. Найдите сумму координат точки B .



№ 3.

Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

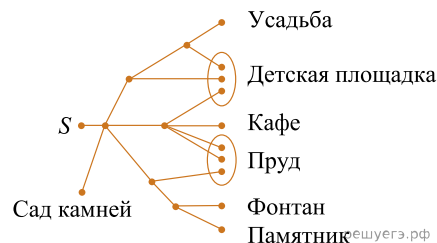


№ 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что наступит исход ОР (в первый раз выпадает орёл, во второй — решка).

№ 5.

Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



№ 6.

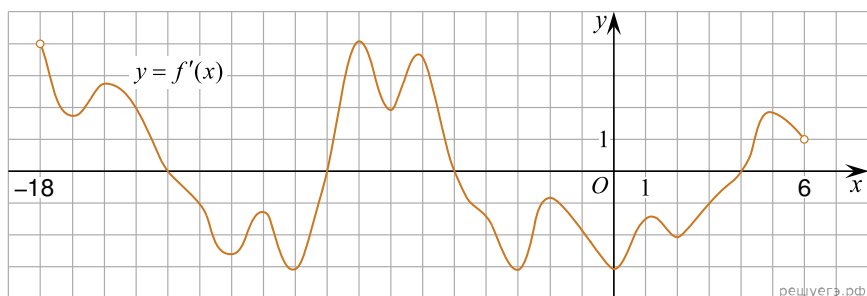
Решите уравнение $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

№ 7.

Найдите значение выражения $x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ при $x \leq 2$.

№ 8.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-18; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13; 1]$.



№ 9.

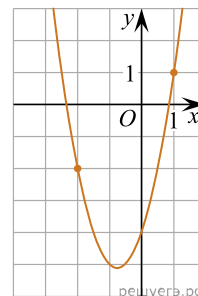
При движении ракеты ее видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, где $l_0 = 5\text{ м}$ — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$ — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы ее наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

№ 10.

Два велосипедиста одновременно отправились в 240-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 1 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 1 час раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$. Найдите $f(-5)$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 7^{x^2 - 2x + 3}$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\sqrt{\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x + 1} = \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$.

№ 14.

Дана правильная треугольной призма $ABCA_1B_1C_1$

а) Докажите, что плоскость α , проходящая через прямую AB_1 и центр грани ACC_1A_1 , делит объем призмы в отношении 2 : 1.

б) Пусть высота призмы равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1 .

№ 15.

Решите неравенство: $2\log_9(4x^2 + 1) \geq \log_3(3x^2 + 4x + 1)$.

№ 16.

В декабре планируется взять кредит в банке на целое число миллионов рублей на срок 6 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый июнь долг возрастает на 10% по сравнению с началом данного года;
- с июля по декабрь 1-го, 2-го, 3-го и 4-го годов заемщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг равным первоначальному;
- с июля по декабрь 5-го и 6-го годов необходимо выплатить одинаковые суммы так, чтобы весь долг был погашен полностью.

Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заемщика будет не менее 14 млн руб.

№ 17.

В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O , которая касается стороны AB в точке K . Окружность в точке O_1 касается стороны AB в точке L , а также продолжений сторон AC и BC .

а) Докажите, что около четырёхугольника $AOBO_1$ можно описать окружность.

б) Найдите площади четырёхугольников $AOBO_1$ и $KOLO_1$, если известно, что $AB = 8$, $AC = 6$, $BC = 10$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

№ 19.

Марина составляет из n четверок числа и находит всевозможные их суммы. Например, если $n = 4$, то возможных сумм было бы 5:

1) $4 + 4 + 4 + 4 = 16$; 2) $4 + 4 + 44 = 52$; 3) $44 + 44 = 88$; 4) $444 + 4 = 448$; 5) 4444 .

а) Может ли одна из сумм S равняться 460, если $n = 25$?

б) Может ли одна из сумм S равняться 800, если $n = 25$?

в) Сколько существует различных значений n , для которых одна из сумм равна 800?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27872	108
2	27726	21
3	27173	4
4	320185	0,25
5	562239	0,3125
6	77382	12
7	26829	2
8	27495	1

9	27983	180000
10	26583	16
11	508911	31
12	507908	49

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), или получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Заметим, что $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, получим в левой части

$$\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 - \cos x)} = \sqrt{4 \sin^4 \frac{x}{2}} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Далее, используя формулы $-\sin(-x) = \sin x$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$, перейдем к половинному аргументу в правой части и сведем уравнение к однородному тригонометрическому второй степени:

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = \sin x - 5 \cos x \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \sin x - 5 \cos x \Leftrightarrow$$

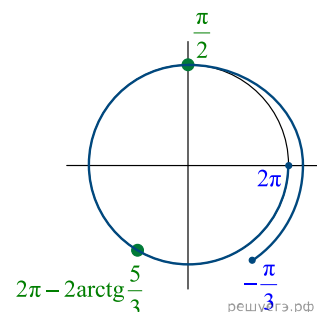
$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 5 \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ \frac{x}{2} = -\arctg \frac{5}{3} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = -2\arctg \frac{5}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ \frac{x}{2} = -\arctg \frac{5}{3} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = -2\arctg \frac{5}{3} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) Отберем корни при помощи единичной окружности, подходят $\frac{\pi}{2}$ и $2\pi - 2\arctg \frac{5}{3}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k, -2\arctg \frac{5}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{\pi}{2}, 2\pi - 2\arctg \frac{5}{3}$.

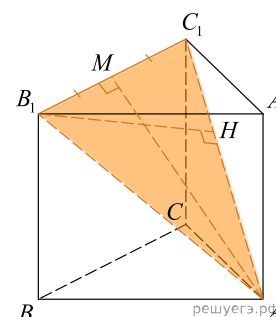
№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Центр грани ACC_1A_1 лежит на прямой AC_1 , поэтому сечение призмы плоскостью α — треугольник AB_1C_1 . Объем пирамиды $AB_1C_1A_1$ вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3} \cdot AA_1 \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} V_{ABCA_1B_1C_1}.$$

Значит, объем призмы делится плоскостью α в отношении 2:1. Что и требовалось доказать.



б) Искомое расстояние равно высоте B_1H треугольника AB_1C_1 . Треугольник равнобедренный, поскольку $B_1A = AC_1 = \sqrt{5}$. Дополнительно проведём высоту и медиану AM . Найдём её длину:

$$AM = \sqrt{B_1A^2 - B_1M^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}.$$

Площадь треугольника B_1AC_1 равна

$$\frac{1}{2} B_1C_1 \cdot AM = \frac{1}{2} AC_1 \cdot B_1H,$$

откуда получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{19}}{2} = \sqrt{5} \cdot B_1H.$$

Следовательно,

$$B_1H = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{95}}{10}.$$

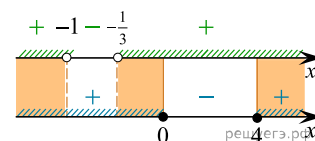
Ответ: б) $\frac{\sqrt{95}}{10}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Используя формулу $\log_{a^2} b = \frac{1}{2} \log_a b$, получаем:

$$\begin{aligned}
 2\log_9(4x^2 + 1) &\geq \log_3(3x^2 + 4x + 1) \Leftrightarrow \log_3(4x^2 + 1) \geq \log_3(3x^2 + 4x + 1) \Leftrightarrow \\
 2\log_9(4x^2 + 1) &\geq \log_3(3x^2 + 4x + 1) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_3(4x^2 + 1) &\geq \log_3(3x^2 + 4x + 1) \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 1 > 0, \\ 3x^2 + 4x + 1 > 0, \\ 4x^2 + 1 \geq 3x^2 + 4x + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1) > 0, \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -\frac{1}{3} < x \leq 0, \\ x \geq 4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 1 > 0, \\ 3x^2 + 4x + 1 > 0, \\ 4x^2 + 1 \geq 3x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1) > 0, \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ -\frac{1}{3} < x \leq 0, \\ x \geq 4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right] \cup [4; +\infty)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Пусть сумма кредита составляет S млн руб., а выплаты в последние два года— по x млн руб. Составим таблицу.

Год	Долг в январе млн руб.	Долг в июне млн руб.	Выплата млн руб.
1	S	$1,1S$	$0,1S$

2	S	1,1S	0,1S
3	S	1,1S	0,1S
4	S	1,1S	0,1S
5	S	1,1S	x
6	1,1S - x	(1,1S - x) · 1,1	x

К концу шестого года долг должен быть выплачен полностью, то есть

$$(1,1S - x) \cdot 1,1 - x = 0 \Leftrightarrow 1,21S - 2,1x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1,21S}{2,1}.$$

Общая сумма выплат будет не менее 14 млн руб., если

$$4 \cdot 0,1S + 2 \cdot \frac{1,21S}{2,1} \geq 14 \Leftrightarrow 0,84S + 2,42S \geq 29,4 \Leftrightarrow 3,26S \geq 29,4 \Leftrightarrow S \geq \frac{2940}{326} \Leftrightarrow S \geq 9\frac{6}{326}.$$

$$4 \cdot 0,1S + 2 \cdot \frac{1,21S}{2,1} \geq 14 \Leftrightarrow 0,84S + 2,42S \geq 29,4 \Leftrightarrow 3,26S \geq 29,4 \Leftrightarrow S \geq \frac{2940}{326} \Leftrightarrow S \geq 9\frac{6}{326}.$$

Значит, наименьшее целое значение S равно 10.

Ответ: 10 млн рублей.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

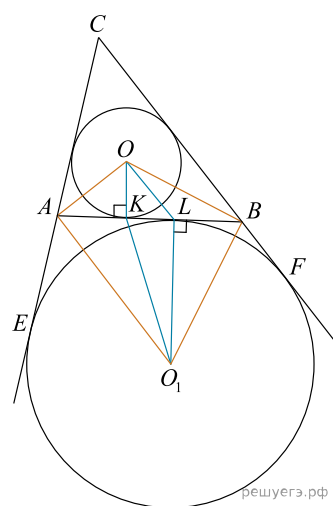
Решение. а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла. Угол между биссектрисами смежных углов прямой, поэтому $\angle OAO_1 = \angle OBO_1 = 90^\circ$. Тогда $\angle OAO_1 + \angle OBO_1 = 180^\circ$, следовательно, около четырёхугольника $AOBO_1$ можно описать окружность.

б) Треугольник CAB прямоугольный, поскольку

$$AC^2 + AB^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = BC^2.$$

Имеем: $\angle CAB = 90^\circ$ и $\angle OAK = 45^\circ$, тогда треугольник AKO равнобедренный, откуда следует, что $AK = KO$. Найдём OK по формуле $S = pr$. Получаем:

$$OK = \frac{S_{ABC}}{p_{ABC}} = \frac{6 \cdot \frac{8}{2}}{(6 + 8 + 10) : 2} = 2.$$



Пусть окружность с центром O_1 касается прямых AC и BC в точках E и F соответственно. Тогда $EC = CF = p_{ABC} = 12$, откуда $AL = AE = 12 - AC = 6$. Треугольник ALO_1 равнобедренный, значит, $AL = LO_1$. Находим площадь четырёхугольника $AOBO_1$

$$S_{AOBO_1} = \frac{1}{2}AB(OK + LO_1) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot (2 + 6) = 32$$

и площадь четырёхугольника $KOLO_1$

$$\begin{aligned} S_{KOLO_1} &= \frac{1}{2}KL(KO + LO_1) = \frac{1}{2}(AB - AK - LB) \cdot (2 + 6) = \\ &= 4(AB - AK - BF) = 4(8 - 2 - (12 - 10)) = 4 \cdot 4 = 16. \quad S_{KOLO_1} = \frac{1}{2}KL(KO + LO_1) = \\ &= \frac{1}{2}(AB - AK - LB) \cdot (2 + 6) = 4(AB - AK - BF) = \\ &= 4(8 - 2 - (12 - 10)) = 4 \cdot 4 = 16. \end{aligned}$$

Ответ: б) 32 и 16.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано.	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной.	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Заметим, что если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением системы, то пара чисел $(-x_0; y_0)$ тоже является решением системы. Значит, чтобы решение было единственным, необходимо, чтобы $x_0 = 0$. С учётом второго уравнения системы получаем, что единственным решением может являться либо пара чисел $(0; 1)$, либо пара чисел $(0; -1)$.

Пара чисел $(0; 1)$, является решением системы при $a = \frac{4}{3}$. Проверим есть ли другие решения при этом значении параметра. Подставляя найденное значение параметра, находим:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3 \cdot \frac{4}{3}, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2^{|x|} - y) = 5(x^2 - |x|), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем, что $-1 \leq x \leq 1$ и $-1 \leq y \leq 1$, тогда левая часть первого уравнения системы неотрицательна, а правая неположительна, причём равенство достигается только при $x = 0$ и $y = 1$. Значит, при $a = \frac{4}{3}$ система имеет единственное решение.

Пара чисел $(0; -1)$ является решением системы при $a = \frac{10}{3}$. Подставляя найденное значение параметра, находим:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3 \cdot \frac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2^{|x|} - y - 2) = 5(x^2 - |x|), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3 \cdot \frac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2^{|x|} - y - 2) = 5(x^2 - |x|), \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что кроме пары чисел $(0; -1)$ решением системы является пара чисел $(1; 0)$. Значит, при $a = \frac{10}{3}$ система имеет более одного решения.

Ответ: $\left\{\frac{4}{3}\right\}$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. а) Заметим, что $460 = 44 \cdot 10 + 4 \cdot 5$, причем на 10 чисел, равных 44 и 5 чисел, равных 4, ушло ровно 25 четверок.

б) Остаток от деления на 9 любого числа совпадает с остатком от деления на 9 его суммы цифр. Кроме того, остаток суммы равен сумме остатков слагаемых (возможно, уменьшенной на определенное число, кратное 9). Значит, остаток от деления любой такой суммы на 9 совпадает с остатком от деления $4 + 4 + \dots + 4 = 4 \cdot 25 = 100$ на 9 и равен 1. Но 800 дает остаток 8 при делении на 9.

в) Из предыдущего пункта следует, что $4 \cdot n$ должно давать тот же остаток при делении на 9, что и 800, то есть 8. Значит, $4n - 8 = 4(n - 2)$ кратно 9, поэтому n дает остаток 2 при делении на 9.

Для получения суммы 800 можно использовать только слагаемые 4, 44, 444, причем последнее не более одного раза. Поскольку $444 + 4 \cdot 44 < 800$ и $6 \cdot 44 < 800$, использовать 11 и менее четверок невозможно. Тогда $444 + 8 \cdot 44 + 4 = 800$, это позволяет использовать 20 четверок.

Заменяя по очереди каждое 44 на сумму одиннадцати четверок, мы будем увеличивать

общее количество цифр на 9, что даст варианты с $n = 29, 38, \dots, 92$ четверками.

Далее, $11 \cdot 44 + 79 \cdot 4 = 800$, это позволяет использовать 101 четверку. После этого вновь заменяя 44 на сумму одиннадцати четверок, мы получим варианты 110, 121, ..., 200.

Больше нельзя, поскольку любое число из k четверок не меньше $4k$, значит, сумма чисел, в которых более двухсот четверок, больше 800. Итак, $n = 20, 29, 38, \dots, 200$. Эти числа можно записать в виде $11 + 9x$, где $x \in [1; 21]$, всего 21 число.

Ответ: а) да; б) нет; в) 21.
