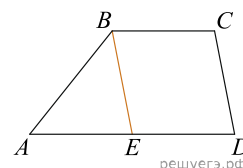


Вариант 211

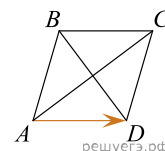
№ 1.

Прямая, проведенная параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 4, отсекает треугольник, периметр которого равен 15. Найдите периметр трапеции.



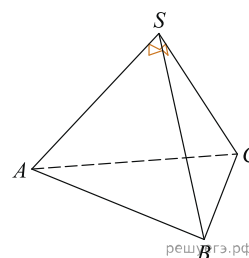
№ 2.

Диагонали ромба $ABCD$ равны 12 и 16. Найдите длину вектора $\vec{AD}$.



№ 3.

Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 3. Найдите объем пирамиды.



№ 4.

В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме «Неравенства». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме «Неравенства».

№ 5.

На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

№ 6.

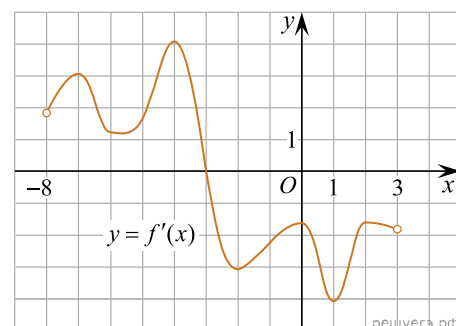
Решите уравнение $\sqrt{6+5x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

№ 7.

Найдите $\frac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$.

№ 8.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-3; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



№ 9.

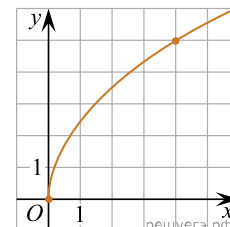
Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит до полной остановки путь S м. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (в кг), время t (в с) и пройденный путь S (в м) связаны соотношением $F = \frac{2mS}{t^2}$. Определите, сколько секунд заняло торможение, если известно, что сила трения равна 2000 Н, масса автомобиля — 1500 кг, путь — 600 м.

№ 10.

Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10 000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6,76)$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[1; 10]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

№ 14.

Шар проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба.

а) Докажите, что сфера касается ребер в их серединах.

б) Найдите объем шара, если ребро куба равно 1.

№ 15.

Решите неравенство:
$$\frac{(\log_3^2 |x| - 3\log_3 |x| - 10) \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{x-1} - 2^{x-1} \right)}{4x^2 - x^3 - 4x} \leq 0.$$

№ 16.

15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

№ 17.

В прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 4$, $BC = 3$ вписана окружность с центром O , касающаяся сторон BC , AC и AB треугольника в точках R , Q , P соответственно.

а) Докажите, что $AO \cdot BO \cdot CO = 10$.

б) Найдите площадь треугольника PQR .

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$$

меньше -2 .

№ 19.

Существуют ли такие восемь различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя:

а) ровно в 500 раз?

б) ровно в 400 раз?

в) Найдите наименьшее возможное натуральное число, равное отношению среднего арифметического этих чисел к их наибольшему общему делителю.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27835	23
2	27713	10
3	27111	4,5
4	285927	0,6
5	320200	0,98
6	77375	6
7	26788	-9
8	27491	-3
9	523991	30
10	99587	35000
11	509113	6,5
12	77469	10

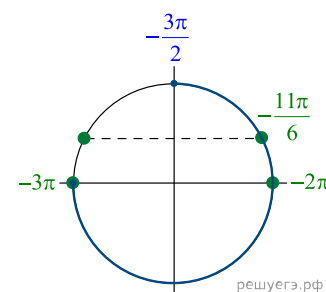
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 - 2 \sin^2 x = \sqrt{3} \cos x + 1 \Leftrightarrow \sin x - 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$



б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку

$$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]. \text{ Получим числа: } -3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\left\{\pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-3\pi; -2\pi; -\frac{11\pi}{6}$.

№ 14.

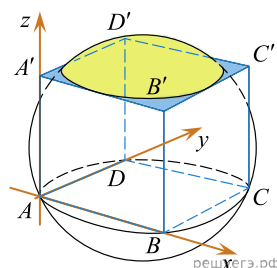
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Шар касается сторон одной из граней куба. Сечение шара плоскостью этой грани представляет собой круг, вписанный в квадрат. Окружность, вписанная в правильный многоугольник, касается всех его сторон в их серединах. Это и доказывает требуемое.

б) Введем обозначения так, как показано на рисунке. Введем прямоугольную систему координат с центром в вершине куба A , оси направим вдоль ребер, и пусть центр сферы имеет координаты (x_0, y_0, z_0) , а радиус сферы равен R . Тогда уравнение сферы будет

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2,$$

а лежащие на сфере точки $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$ и точка касания сферы с серединой ребра $A'B'$, имеющая координаты $\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$, удовлетворяют соответственно уравнениям:



$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2, \\ (1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2, \\ x_0^2 + (1 - y_0)^2 + z_0^2 = R^2, \\ \left(\frac{1}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2 + (1 - z_0)^2 = R^2, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ (1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ x_0^2 + (1 - y_0)^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ \left(\frac{1}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2 + (1 - z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ 1 - 2x_0 = 0, \\ 1 - 2y_0 = 0, \\ x_0 + 1 - 2z_0 + \frac{1}{4} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2, \\ (1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = R^2, \\ x_0^2 + (1 - y_0)^2 + z_0^2 = R^2, \\ \left(\frac{1}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2 + (1 - z_0)^2 = R^2, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ (1 - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ x_0^2 + (1 - y_0)^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ \left(\frac{1}{2} - x_0\right)^2 + y_0^2 + (1 - z_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2, \\ 1 - 2x_0 = 0, \\ 1 - 2y_0 = 0, \\ x_0 + 1 - 2z_0 + \frac{1}{4} = 0, \end{cases}$$

откуда $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$, $z_0 = \frac{3}{8}$, $R^2 = \frac{41}{64}$, то есть $R = \frac{\sqrt{41}}{8}$.

Тогда объем шара равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{41\sqrt{41}}{384}\pi.$$

Ответ: $\frac{41\sqrt{41}}{384}\pi$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек. ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

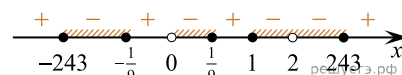
Решение. Пусть $t = \log_3 |x|$, представим первый множитель в числителе в виде

$$\begin{aligned} t^2 - 3t - 10 &= (t - 5)(t - (-2)) = (\log_3 |x| - \log_3 243) \left(\log_3 |x| - \log_3 \frac{1}{9} \right). \\ t^2 - 3t - 10 &= (t - 5)(t - (-2)) = \\ &= (\log_3 |x| - \log_3 243) \left(\log_3 |x| - \log_3 \frac{1}{9} \right). \end{aligned}$$

Второй множитель числителя представим в виде $2^{-x+1} - 2^{x-1}$.

Для рационализации неравенства заметим, что разность $2^x - 2^y$ имеет тот же знак, что и разность $x - y$. Кроме того, на ОДЗ логарифма разность $\log_a b - \log_a c$ и разность $(a-1)(b-c)$ также имеют одинаковые знаки. Наконец, одинаковые знаки имеют выражения $|a| - |b|$ и $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Последовательно заменяя множители в числителе выражениями того же знака и учитывая ОДЗ, получим равносильное неравенство:

$$\begin{aligned} &\frac{(\log_3 |x| - \log_3 243) \left(\log_3 |x| - \log_3 \frac{1}{9} \right) (2^{-x+1} - 2^{x-1})}{-x(x-2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(|x| - 243) \left(|x| - \frac{1}{9} \right) (-x+1 - (x-1))}{-x(x-2)^2} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(x-243)(x+243) \left(x - \frac{1}{9} \right) \left(x + \frac{1}{9} \right) (-2(x-1))}{-x(x-2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -243 \leq x \leq -\frac{1}{9}, \\ 0 < x \leq \frac{1}{9}, \\ 1 \leq x < 2, \\ 2 < x \leq 243. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x-243)(x+243) \left(x - \frac{1}{9} \right) \left(x + \frac{1}{9} \right) (-2(x-1))}{-x(x-2)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -243 \leq x \leq -\frac{1}{9}, \\ 0 < x \leq \frac{1}{9}, \\ 1 \leq x < 2, \\ 2 < x \leq 243. \end{cases} \end{aligned}$$



Ответ: $\left[-243; -\frac{1}{9}\right] \cup \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [1; 2) \cup (2; 243]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Не снижая общности рассуждений, примем начальную сумму кредита за 100руб. и будем считать, что выплаты производились 14 числа каждого месяца. Составим таблицу выплат:

Дата	14.02	14.03	14.04	14.05	14.06	14.07
Долг, руб.	105	94,5	84	73,5	63	52,5
Выплата, руб.	15	14,5	14	13,5	13	52,5
Остаток долга на день выплаты, руб.	90	80	70	60	50	0
Остаток долга на день выплаты, %	90%	80%	70%	60%	50%	0%

Таким образом, полная сумма выплат равна $15+14,5+14+13,5+13+52,5=122,5$ руб., переплата составила 22,5%.

Ответ: 22,5.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> и использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Заметим, что $BC = QC$ как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Следовательно, четырехугольник $ORCQ$ является квадратом. Пусть $BC = QC = x$, тогда $BQ = BP = 4 - x$. Вычислим гипотенузу AB :

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Таким образом,

$$3 - x + 4 - x = 5 \Leftrightarrow x = 1.$$

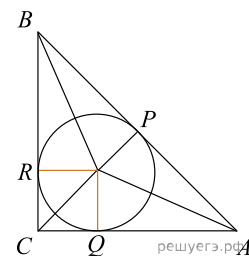
Тогда

$$AO \cdot BO \cdot CO = \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 10.$$

б) Вычислим S_{PQR} :

$$\begin{aligned} S_{PQR} &= S_{ABC} - S_{BPR} - S_{APQ} - S_{RCQ} = \\ &= \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \angle B - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin \angle A - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \\ &= \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1,2. \end{aligned}$$

Ответ: б) 1,2.

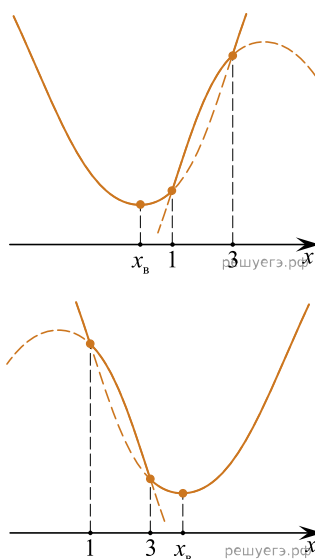


№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но в ответ ошибочно включены одна или обе граничные точки.	3
С помощью верного рассуждения получены не все значения a .	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения графика функции и прямой (аналитически или графически).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. При $1 \leq x \leq 3$ модуль раскрывается «со знаком минус»: $f(x) = -x^2 + (a+4)x - a - 4$. На отрезке $[1; 3]$ график функции представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз.

При $x \leq 1$ или $x \geq 3$ модуль раскрывается «со знаком плюс»: $f(x) = x^2 + (a-4)x - a + 2$. График функции на этих лучах представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Вершина этой параболы может лежать левее отрезка $[1; 3]$, правее этого отрезка или на самом отрезке. Рассмотрим эти случаи.



Если $x_B \leq 1$ и $x_B \geq 3$, то есть если

$$\begin{cases} -\frac{a-4}{2} \geq 3, \\ -\frac{a-4}{2} \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4 \leq -6, \\ a-4 \geq -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -2, \\ a \geq 2, \end{cases}$$

то наименьшее значение функции достигается в вершине, абсцисса которой $\frac{4-a}{2}$. Оно равно:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4-a}{2}\right)^2 + (a-4)\left(\frac{4-a}{2}\right) - a + 2 &= \frac{(4-a)^2}{4} - \frac{(4-a)^2}{2} - a + 2 = -\frac{(4-a)^2}{4} - a + 2 = \left(\frac{4-a}{2}\right)^2 + (a-4)\left(\frac{4-a}{2}\right) - a + 2 = \\ &= \frac{(4-a)^2}{4} - \frac{(4-a)^2}{2} - a + 2 = -\frac{(4-a)^2}{4} - a + 2 = \\ &= -\frac{16-8a+a^2}{4} - a + 2 = -2 + a - \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

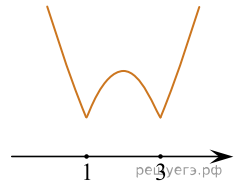
По условию требуется, чтобы наименьшее значение было меньше -2 :

$$\begin{aligned} -2 + a - \frac{a^2}{4} < -2 &\Leftrightarrow a - \frac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a(a-4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4, \\ a < 0. \end{cases} \quad -2 + a - \frac{a^2}{4} < -2 \Leftrightarrow a - \frac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 - 4a > 0 \Leftrightarrow a(a-4) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4, \\ a < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

С учетом того, что $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, получаем: $a \in (-\infty; -2] \cup (4; +\infty)$.

Осталось рассмотреть случай, когда вершина параболы, ветви которой направлены вверх, лежит на отрезке $[1; 3]$. В этом случае параметр $a \in [-2; 2]$, а наименьшее значение функции достигается на концах отрезка. Найдём $f(1) = -1$, и $f(3) = 2a - 1$. Наименьшее значение функции может быть меньше -2 , только если $2a - 1 < -2$, то есть при $a < -\frac{1}{2}$. Учитывая ограничения на a , получаем: $-2 \leq a < -\frac{1}{2}$.

Объединяя найденные значения параметра, получаем ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.



Приведем другое решение.

Заданная функция непрерывна и на бесконечностях стремится к плюс бесконечности. Поэтому при любом значении параметра она достигает своего наименьшего значения. Тогда для того, чтобы наименьшее значение функции $f(x) = ax - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$ было меньше -2 , необходимо и достаточно, чтобы неравенство $f(x) < -2$ имело решение. Запишем его в виде

$$|x^2 - 4x + 3| < -a(x-1) - 1$$

и построим графики левой и правой частей неравенства.

График левой части неравенства — парабола (см.рис.), пересекающая ось абсцисс в точках 1 и 3, с отражённой относительно оси абсцисс отрицательной частью. График правой части неравенства — пучок прямых, проходящих через точку $(1; -1)$.

Нетрудно заметить, что неравенство имеет решения, когда графики имеют более одной точки пересечения. То есть когда прямая проходит выше точки $(3; 0)$ или выше точки касания с параболой на луче $(-\infty; 1]$.

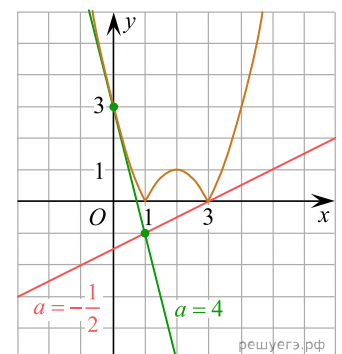
В первом случае угловой коэффициент $-a$ прямой $y = -a(x-1) - 1$ должен быть больше углового коэффициента прямой, проходящей через точку $(3; 0)$.

Имеем: $-a(3-1) - 1 > 0 \Leftrightarrow a < -\frac{1}{2}$.

Во втором случае запишем уравнение $-a(x-1) - 1 = x^2 - 4x + 3$ в виде $x^2 + (a-4)x - a + 4 = 0$ и найдём дискриминант полученного квадратного уравнения: $D = (a-4)^2 + 4(a-4) = (a-4)a$. Парабола имеет с касательной единственную общую точку, поэтому касанию соответствует дискриминант, равный нулю, откуда $a = 0$ или $a = 4$. Подходит только положительный корень, соответствующий отрицательному угловому коэффициенту прямой.

Таким образом, получаем ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (4; +\infty)$.



Примечание Льва Бреслава (Санкт-Петербург).

Во втором решении ссылка на то, что функция непрерывна и на бесконечностях стремится к плюс бесконечности является существенной. Например, для внешне очень похожей функции $g(x) = ax^2 - a - 1 + |x^2 - 4x + 3|$ аналогичная переформулировка не будет равносильна изначальной задаче.

Примечание редакции Решу ЕГЭ.

Полностью соглашаясь с предыдущим замечанием, отметим, что на ЕГЭ снижать оценку ученику за отсутствие указанного обоснования неправильно. Смоленская комиссия ЕГЭ в 2019 году оценила второе решение одним баллом из четырёх, объяснив в апелляции, что решающий должен явно показать, что рассматриваемая им функция достигает наименьшего значения. Работа была перепроверена Рособснадзором, принявшим решение о выставлении полного балла. Подробности этой истории подробно описаны Дмитрием Гушиным [здесь](#), ряд интересных комментариев есть [здесь](#).

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. Сократим все эти числа на их наибольший общий делитель. От этого их сумма (а значит и среднее арифметическое) уменьшится во столько же раз. Итак, можно считать, что наибольший общий делитель чисел равен 1.

а) Сумма этих чисел должна быть равна $500 \cdot 800 = 400000$. Возьмем числа $1, 2, \dots, 799$, их сумма равна

$$\frac{1+799}{2} \cdot 799 = 319600,$$

и еще число $400000 - 319600 = 80400$. Этот набор удовлетворяет условию задачи.

б) Нет. Сумма этих чисел должна быть равна $400 \cdot 800 = 320000$. Но сумма даже самых маленьких 800 чисел равна

$$319600 + 800 = 320400.$$

в) Из доказательства пункта б) ясно, что быть меньше 400 среднее арифметическое тоже не может. Если же оно равно 401 (то есть сумма чисел равна $401 \cdot 800 = 320800$), то можно взять числа $1, 2, \dots, 799$ и

$$320800 - 319600 = 1200.$$

Наборы чисел в пунктах а) и в) действительно имеют наибольший общий делитель 1, поскольку содержат число 1.

Ответ: а) да; б) нет; в) 401.
