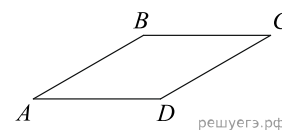


Вариант 215

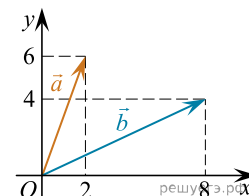
№ 1.

Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 и 12.



№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.



№ 3.

В правильной четырёхугольной пирамиде все рёбра равны 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины боковых рёбер.

№ 4.

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

№ 5.

Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

№ 6.

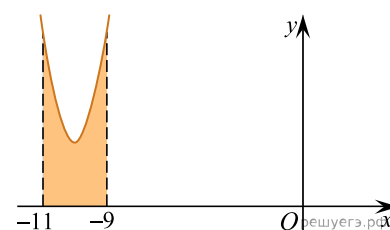
Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x-1} = 5$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{(4a)^{2.5}}{a^2\sqrt{a}}$ при $a > 0$.

№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 30x^2 + 302x - \frac{15}{8}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



№ 9.

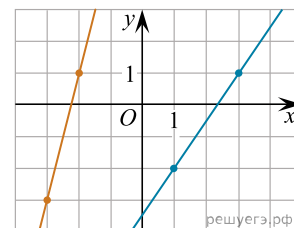
Катер должен пересечь реку шириной $L=100$ м и со скоростью течения $u=0,5$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

№ 10.

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

№ 11.

На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \cos x + 6\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $\frac{6 \sin x - 2 \cos 2x - 4 \cos^2 x - 3}{\sqrt{7} \sin x - 3 \cos x} = 0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -3\pi]$.

№ 14.

Через вершины A_1 и C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость α , параллельная прямой BC_1 . Сторона основания призмы равна 6, а боковое ребро равно 2.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB пополам.

б) Найдите расстояние от прямой BC_1 до плоскости α .

№ 15.

Решите неравенство: $8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2}$.

№ 16.

В начале года за участие в инвестировании крупного проекта фирме был выделен пакет ценных бумаг. К концу каждого k -го года владения ценными бумагами их стоимость увеличивается и становится равной $10k$ условных денежных единиц. В конце k -го года после очередного увеличения стоимости ценных бумаг фирма имеет возможность продать весь пакет, а вырученную сумму вложить в банк, и тогда в конце следующего года вложенная сумма увеличится на 9%. В конце какого года фирме следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на счёте была наибольшей?

№ 17.

На стороне KM остроугольного треугольника PKM ($PK \neq PM$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту PS в точке T , $PS=8$, $TS=6$, H — точка пересечения высот треугольника PKM .

а) Найдите PH .

б) Полуокружность пересекает стороны PK и PM в точках L и N соответственно. Найдите коэффициент подобия треугольников PKM и PNL , если радиус полуокружности равен 20.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-2a} + \sqrt{x^2+4ax+4a^2} = 2$$

имеет хотя бы одно решение.

№ 19.

На доске написано 30 различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых оканчивается или на цифру 2, или на цифру 6. Сумма написанных чисел равна 2454.

а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на 2 и на 6?

б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на 6?

в) Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 6, может быть записано на доске?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27614	24
2	27733	40
3	505099	0,25
4	320178	0,5
5	319353	0,019
6	77384	0,3
7	26834	32
8	323079	6
9	28010	45
10	99596	20
11	509197	−5
12	26692	12

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} 3 - 6\sin^2 x + 7\sin x - 5 = 0, \\ 9\cos^2 x - 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0, \\ \cos^2 x \neq \frac{5}{9}. \end{cases}$$

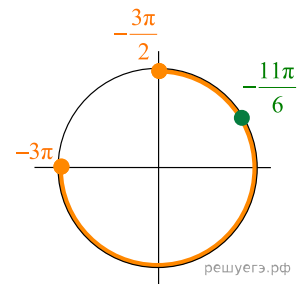
Получаем

$$\begin{cases} \sin x = \frac{2}{3}, \\ \cos x \neq \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x \neq \pm \frac{\sqrt{5}}{3}. \end{cases}$$

При $\sin x = \frac{2}{3}$ не выполнено условие $\cos x \neq \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. При $\sin x = \frac{1}{2}$ находим

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Получим $-\frac{11\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Достроим еще одну призму $ABC A_2 B_2 C_2$, равную данной, так, как показано на рисунке. Отрезки B_2C и BC_1 параллельны по построению, поэтому точка B_2 принадлежит плоскости. Пусть $A_1 B_2$ пересекает AB в точке M . Треугольники $A_1 AM$ и $B_2 BM$ равны по катету и гипотенузе, следовательно, $AM = MB$.

б) Воспользуемся методом объемов. Найдем

$$V_{A_1 B_2 CB} = 2V_{A_1 MBC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_1 A \cdot S_{MBC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6^2 - 3^2} = 6\sqrt{3}. V_{A_1 B_2 CB} = 2V_{A_1 MBC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_1 A \cdot S_{MBC} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6^2 - 3^2} = 6\sqrt{3}.$$

Пусть h — расстояние от точки B (а значит, и от отрезка BC_1) до плоскости. Тогда $V_{A_1 B_2 CB} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{A_1 B_2 C}$. Найдем $S_{A_1 B_2 C}$:

$$A_1 C = B_2 C = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40},$$

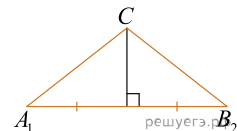
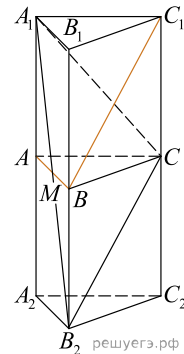
$$A_1 B_2 = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13},$$

$$S_{A_1 B_2 C} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{40 - 13} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{27}.$$

Тогда

$$h = \frac{3V_{A_1 B_2 CB}}{S_{A_1 B_2 C}} = \frac{3 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{27}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}.$$

Ответ: б) $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned} 8 + \log_{\sqrt{x}} 8 &\leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2} \Leftrightarrow 8 + 2 \log_x 8 \leq 2 \log_x (17x^2 - 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_x (17x^2 - 2) - (\log_x 8 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow \log_x (17x^2 - 2) - \log_x (8x^4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17x^2 - 2 - 8x^4}{x - 1} \geq 0, \\ 17x^2 - 2 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x^4 - 17x^2 + 2}{(x-1)(x+1)} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8x^2 - 1)(x^2 - 2)}{x^2 - 1} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{2}{17} < x^2 \leq \frac{1}{8}, \right. \\ \left. 1 < x^2 \leq 2, \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{34}}{17} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \right. \\ \left. 1 < x \leq \sqrt{2}. \right. \end{cases} \\ 8 + \log_{\sqrt{x}} 8 &\leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2} \Leftrightarrow 8 + 2 \log_x 8 \leq 2 \log_x (17x^2 - 2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_x (17x^2 - 2) - (\log_x 8 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow \log_x (17x^2 - 2) - \log_x (8x^4) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17x^2 - 2 - 8x^4}{x - 1} \geq 0, \\ 17x^2 - 2 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x^4 - 17x^2 + 2}{(x-1)(x+1)} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8x^2 - 1)(x^2 - 2)}{x^2 - 1} \leq 0, \\ \left[\frac{2}{17} < x^2 \leq \frac{1}{8}, \right. \\ \left. 1 < x^2 \leq 2, \right. \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{34}}{17} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \right. \\ \left. 1 < x \leq \sqrt{2}. \right. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \log_x (17x^2 - 2) - (\log_x 8 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \log_x(17x^2 - 2) - \log_x(8x^4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17x^2 - 2 - 8x^4}{x - 1} \geq 0, \\ 17x^2 - 2 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x^4 - 17x^2 + 2}{(x - 1)(x + 1)} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8x^2 - 1)(x^2 - 2)}{x^2 - 1} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{2}{17} < x^2 \leq \frac{1}{8}, \right. \\ \left. 1 < x^2 \leq 2, \right. \\ \left. x > 0 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{34}}{17} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ 1 < x \leq \sqrt{2}. \end{cases} 8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 8 + 2 \log_x 8 \leq 2 \log_x(17x^2 - 2) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \log_x(17x^2 - 2) - (\log_x 8 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \log_x(17x^2 - 2) - \log_x(8x^4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17x^2 - 2 - 8x^4}{x - 1} \geq 0, \\ 17x^2 - 2 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x^4 - 17x^2 + 2}{(x - 1)(x + 1)} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8x^2 - 1)(x^2 - 2)}{x^2 - 1} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{2}{17} < x^2 \leq \frac{1}{8}, \right. \\ \left. 1 < x^2 \leq 2, \right. \\ \left. x > 0 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{34}}{17} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ 1 < x \leq \sqrt{2}. \end{cases} 8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 8 + 2 \log_x 8 \leq 2 \log_x(17x^2 - 2) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \log_x(17x^2 - 2) - (\log_x 8 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \log_x(17x^2 - 2) - \log_x(8x^4) \geq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17x^2 - 2 - 8x^4}{x - 1} \geq 0, \\ 17x^2 - 2 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x^4 - 17x^2 + 2}{(x - 1)(x + 1)} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8x^2 - 1)(x^2 - 2)}{x^2 - 1} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{2}{17} < x^2 \leq \frac{1}{8}, \right. \\ \left. 1 < x^2 \leq 2, \right. \\ \left. x > 0 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{34}}{17} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ 1 < x \leq \sqrt{2}. \end{cases} 8 + \log_{\sqrt{x}} 8 \leq 4 \log_x \sqrt{17x^2 - 2} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 8 + 2 \log_x 8 \leq 2 \log_x(17x^2 - 2) \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \log_x(17x^2 - 2) - (\log_x 8 + 4) \geq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \log_x(17x^2 - 2) - \log_x(8x^4) \geq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17x^2 - 2 - 8x^4}{x - 1} \geq 0, \\ 17x^2 - 2 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x^4 - 17x^2 + 2}{(x - 1)(x + 1)} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8x^2 - 1)(x^2 - 2)}{x^2 - 1} \leq 0, \\ x^2 > \frac{2}{17}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\frac{2}{17} < x^2 \leq \frac{1}{8}, \right. \\ \left. 1 < x^2 \leq 2, \right. \\ \left. x > 0 \right] \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{34}}{17} < x \leq \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ 1 < x \leq \sqrt{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{34}}{17}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right] \cup (1; \sqrt{2}]$.

Nº 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Так как к концу каждого k -го года владения ценными бумагами их стоимость увеличивается и становится равной $10k$, ежегодно стоимость ценных бумаг вырастает на 10 условных денежных единиц. Банк ежегодно увеличивает вложенную сумму на 9%, следовательно, вложенная сумма вырастет за год на $10k \cdot 0,09$ условных денежных единиц. Фирме необходимо продать ценные бумаги и вложить средства в банк в тот момент, когда годовой прирост стоимости ценных бумаг станет меньше, чем годовой доход, получаемый от вложения денежных средств в банк. Получаем неравенство:

$$10 < 10k \cdot 0,09 \Leftrightarrow 1 < k \cdot 0,09 \Leftrightarrow k > 11\frac{1}{9}.$$

Таким образом, годовой прирост стоимости ценных бумаг станет меньше, чем годовой доход, получаемый от вложения денежных средств в банк при $k=12$. Значит, фирме следует продать ценные бумаги в конце 12 года.

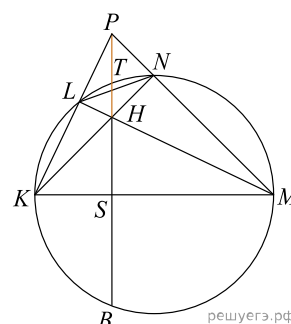
Ответ: 12.

Nº 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) Построим полуокружность до окружности. Пусть прямая PT второй раз пересекает эту окружность в точке B . По теореме о произведении секущей на её внешнюю часть получаем, что $PT \cdot PB = PL \cdot PK$. Треугольники FHL и PKS подобны по двум углам, поэтому $PH : PK = PL : PS$, откуда $PL \cdot PK = PH \cdot PS$. Таким образом, $PH \cdot PS = PT \cdot PB$, то есть $PH \cdot 8 = (8 - 6)(8 + 6)$. Отсюда $PH = 3,5$.

б) По теореме синусов диаметр окружности, описанной около треугольника PKM , равен $\frac{KM}{\sin P}$. Диаметр окружности, описанной около треугольника PNL , — это отрезок PH . Поэтому искомый коэффициент подобия равен $\frac{KM}{PH \sin P} = \frac{80}{7 \sin P}$. С другой стороны, искомый коэффициент подобия равен $\frac{PM}{PL} = \frac{1}{\cos P}$. Получаем равенство: $\frac{80}{7 \sin P} = \frac{1}{\cos P}$. Отсюда $\operatorname{tg} P = \frac{80}{7}$. Тогда



$$\frac{1}{\cos^2 P} = 1 + \operatorname{tg}^2 P = 1 + \frac{6400}{49} = \frac{6449}{49}.$$

Значит, искомый коэффициент подобия равен $\frac{\sqrt{6449}}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6449}}{7}$.

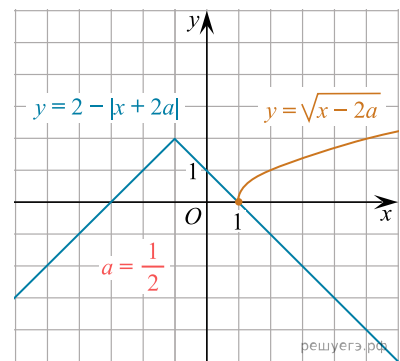
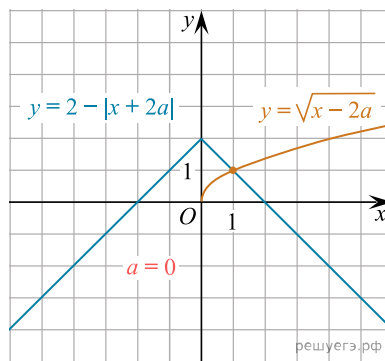
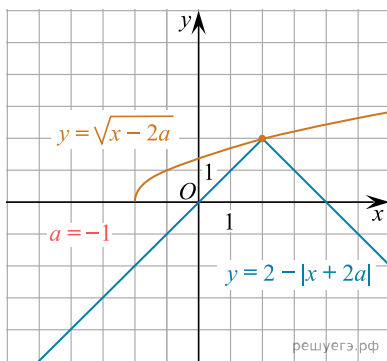
№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в решении допущена вычислительная ошибка или оно недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получен ответ, но в ходе решения допущена одна ошибка, отличная от вычислительной	2
Получены некоторые верные значения параметра, однако решение содержит более одной ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Решение. Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} \sqrt{x-2a} + \sqrt{x^2+4ax+4a^2} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{x-2a} + \sqrt{(x+2a)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2a} = 2 - |x+2a|. \quad \sqrt{x-2a} + \sqrt{x^2+4ax+4a^2} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-2a} + \sqrt{(x+2a)^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-2a} = 2 - |x+2a|. \quad \sqrt{x-2a} + \sqrt{x^2+4ax+4a^2} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-2a} + \sqrt{(x+2a)^2} = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x-2a} = 2 - |x+2a|. \end{aligned}$$

Построим графики левой и правой частей полученного уравнения. График функции $y = \sqrt{x-2a}$ получается из графика $y = \sqrt{x}$ смещением на $2a$ вправо (при отрицательных значениях a — влево). График функции $y = 2 - |x+2a|$ получается из графика $y = -|x|$ смещением на 2 вверх и на $2a$ влево (при отрицательных значениях a — вправо). Уравнение будет иметь решения тогда и только тогда, когда графики левой и правой частей имеет общие точки. Изобразим граничные случаи.



При отрицательных значениях параметра a , решения будут, если вершина графика $y = 2 - |x+2a|$, координаты которой $(-2a; 2)$, находится не ниже графика $y = \sqrt{x-2a}$. Найдём значения параметра, подставив координаты этой точки в $y \geq \sqrt{x-2a}$:

$$2 \geq \sqrt{-2a-2a} \Leftrightarrow 4 \geq -4a \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq a < 0$$

При неотрицательных значениях параметра a , решения будут, если вершина графика $y = \sqrt{x-2a}$, координаты которой $(2a; 0)$, находится не выше графика $y = 2 - |x+2a|$. Найдём значения параметра, подставив координаты этой точки в $y \leq 2 - |x+2a|$:

$$0 \leq 2 - |2a+2a| \Leftrightarrow |4a| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, уравнение имеет хотя бы одно решение при $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Если на доске написано по 15 чисел, оканчивающихся на 2 и на 6, то их сумма оканчивается на 0. Это противоречит тому, что сумма 2454.

б) Пусть на доске ровно одно число, оканчивающееся на 6. Тогда на доске написано 29 чисел, оканчивающихся на 2. Их сумма не меньше, чем сумма 29 написанных чисел, оканчивающихся на 2:
 $2+12+\dots+282=\frac{284\cdot 29}{2}=4118$. Это противоречит тому, что сумма равна 2454.

в) Пусть на доске n чисел, оканчивающихся на 6, и $30-n$ чисел, оканчивающихся на 2. Тогда сумма чисел, оканчивающихся на 2, не меньше суммы

$$\begin{aligned}2+12+\dots+(2+10(29-n)) &= \frac{(4+10(29-n))(30-n)}{2} = 5n^2 - 297n + 4410. \\ 2+12+\dots+(2+10(29-n)) &= \\ &= \frac{(4+10(29-n))(30-n)}{2} = 5n^2 - 297n + 4410.\end{aligned}$$

Сумма чисел, оканчивающихся на 6, не меньше суммы

$$6+16+\dots+(6+10(n-1)) = \frac{(12+10(n-1))n}{2} = 5n^2 + n.$$

Таким образом, $2454 \geq 10n^2 - 296n + 4410 \Leftrightarrow 5n^2 - 148n + 978 \leq 0$, откуда $n \geq 10$, поскольку $n \in \mathbb{N}$.

Если на доске 10 чисел, оканчивающаяся на 6, и 20 чисел, оканчивающихся на 2, то их сумма оканчивается на 0. Значит, чисел, оканчивающихся на 6, больше 10. Приведём пример 11 чисел, оканчивающихся на 6, и 19 чисел, оканчивающихся на 2, с суммой 2454: 6, 16, ..., 86, 96, 196, 2, 12, ..., 172, 182.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 11.
