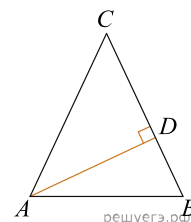


Вариант 217

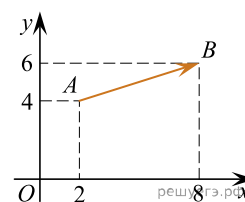
№ 1.

В треугольнике ABC $AC = BC$. AD — высота, угол BAD равен 24° . Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



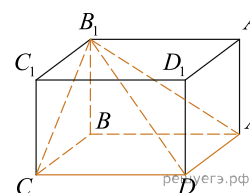
№ 2.

Найдите сумму координат вектора $\vec{AB}$.



№ 3.

Найдите объем многогранника, вершинами которого являются вершины A , B , C , D , B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 9$, $BC = 3$, $BB_1 = 8$.



№ 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что выпадет хотя бы две решки.

№ 5.

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна $0,02$. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна $0,99$. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна $0,01$. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

№ 6.

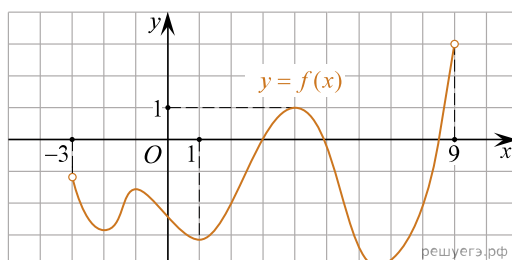
Найдите корень уравнения $\sqrt{3x-8} = 5$.

№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$.

№ 8.

На рисунке изображен график функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции равна нулю на отрезке $[0; 8]$.



№ 9.

Электрический прибор после включения в сеть нагревается и через некоторое время автоматически выключается и начинает остывать. Температура прибора в градусах Цельсия вычисляется по формуле: $T = -t^2 + 14t + T_0$, где t — время в минутах, прошедшее после включения прибора в сеть, $T_0 = 25^\circ\text{C}$ — начальная температура прибора. На протяжении какого времени в минутах температура прибора будет не менее 70°C ?

№ 10.

Два велосипедиста одновременно отправились в 88-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ дайте в км/ч.

№ 11.

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(16)$.

№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

№ 13.

а) Решите уравнение $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{2} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

№ 14.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребрах AB , $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ отмечены точки K , L и M соответственно так, что $KLMC$ — равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 8.

а) Докажите, что точка M — середина ребра $B_1 C_1$.

б) Найдите угол между плоскостями KLM и ABC , если площадь трапеции $KLMC$ равна $12\sqrt{2}$.

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x} + \frac{7x - 19}{x - 3} \leq \frac{8x + 1}{x}$.

№ 16.

Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость (за 1 тонну)	Отпускная цена (за 1 тонну)	Производственные возможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

№ 17.

В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ точки F и Q — середины сторон NK и LM соответственно. Диагональ KM делит точкой пересечения отрезок FQ пополам.

а) Докажите, что площадь четырехугольника $KLMN$ в 4 раза больше площади треугольника FMN .

б) Найдите синус угла между диагоналями четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон четырехугольника $KLMN$, если площадь FMN равна $6\sqrt{3}$, $KM = 12$, $NL = 8$.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - 2x + |y| - 15 = 0, \\ x^2 + (y - a)(y + a) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

имеет ровно 6 решений.

№ 19.

Для чисел A и B , состоящих из одинакового количества цифр, вычислили S — сумму произведений соответствующих цифр. Например, для числа $A=123$ и $B=579$ получается сумма $S = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 46$.

а) Существуют ли трёхзначные числа A и B , для которых $S = 100$?

б) Существуют ли пятизначные числа A и B , для которых $S = 400$?

в) Верно ли, что любое натуральное число от 1 до 260 является суммой для некоторых четырёхзначных чисел A и B ?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
-------	---------	-------

1	27760	48
2	27723	8
3	639664	72
4	510333	0.5
5	320211	0.0296
6	27465	11
7	26757	5
8	661019	3
9	676852	4
10	26584	8
11	639672	4
12	26694	9

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$2 \sin 4\pi x \cos 4\pi x + 1 = \cos 4\pi x + \sqrt{2} \left(\cos 4\pi x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 4\pi x \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \sin 4\pi x \cos 4\pi x + 1 - 2 \cos 4\pi x - \sin 4\pi x = 0$$

$$2 \cos 4\pi x (\sin 4\pi x - 1) - (\sin 4\pi x - 1) = 0$$

$$(2 \cos 4\pi x - 1)(\sin 4\pi x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos 4\pi x = 1 \\ \sin 4\pi x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\pi x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{12} + \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{1}{8} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) Ограничим каждое полученное решение из пункта «а» и решим эти неравенства:

1)

$$2 - \sqrt{7} \leq \frac{1}{12} + \frac{n}{2} \leq \sqrt{7} - 2$$

$$\frac{23}{12} - \sqrt{7} \leq \frac{n}{2} \leq \sqrt{7} - \frac{25}{12}$$

$$\frac{23}{6} - 2\sqrt{7} \leq n \leq 2\sqrt{7} - \frac{25}{6} \Rightarrow n = -1, 0, 1 \Rightarrow x = -\frac{5}{12}, \frac{1}{12}, \frac{7}{12}$$

2)

$$2 - \sqrt{7} \leq -\frac{1}{12} + \frac{n}{2} \leq \sqrt{7} - 2$$

$$\frac{25}{12} - \sqrt{7} \leq \frac{n}{2} \leq \sqrt{7} - \frac{23}{12}$$

$$\frac{25}{6} - 2\sqrt{7} \leq n \leq 2\sqrt{7} - \frac{23}{6} \Rightarrow n = -1, 0, 1 \Rightarrow x = -\frac{7}{12}, -\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$$

3)

$$2 - \sqrt{7} \leq \frac{1}{8} + \frac{k}{2} \leq \sqrt{7} - 2$$

$$1.875 - \sqrt{7} \leq \frac{k}{2} \leq \sqrt{7} - 2.125$$

$$3.75 - 2\sqrt{7} \leq k \leq 2\sqrt{7} - 4.25 \Rightarrow k = -1, 0, 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}.$$

Ответ: а) $\{x = \pm \frac{1}{12} + \frac{n}{2}, x = \frac{1}{8} + \frac{k}{2} : n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$; б) $\pm \frac{5}{12}, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{7}{12}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}.$

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \frac{7x-19}{x-3} \leq \frac{8x+1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2-2x} + 7 + \frac{2}{x-3} - 8 - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-2}{x^2-2x} + \frac{7x-19}{x-3} \leq \frac{8x+1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x^2-2x} + 7 + \frac{2}{x-3} - 8 - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x \leq 1, \\ 2 < x < 3. \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)} + \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ 0 < x \leq 1, \\ 2 < x < 3. \end{cases}$$



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 1] \cup (2; 3)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть x — доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а y — доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом блинчиков с ягодной начинкой производится $90x$ тонн, а с творожной начинкой — $75y$ тонн. Кроме того, из условия ассортиментности следует, что $90x \geq 15$ откуда $x \geq \frac{1}{6}$, а $75y \geq 15$, откуда $y \geq \frac{1}{5}$. Прибыль завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна $100 - 70 = 30$ тыс. руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна $135 - 100 = 35$ тыс. руб., общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна $S(x, y) = 30 \cdot 90x + 35 \cdot 75y = 2700x + 2625y = 75 \cdot (36x + 35y)$. Таким образом, нам необходимо найти наибольшее значение функции $S(x, y) = 75 \cdot (36x + 35y)$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6}, y \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y=1-x$ в выражение $36x+35y$, получаем: $36x+35(1-x)=x+35$. Наибольшее значение этого выражения при условии $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ достигается при $x=\frac{4}{5}$, тогда $y=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$.

Поэтому максимально возможная прибыль завода за месяц равна:

$$75 \cdot \left(36 \cdot \frac{4}{5} + 35 \cdot \frac{1}{5} \right) = 75 \cdot \frac{179}{5} = 2685 \text{ тыс.руб.}$$

при этом фабрика производит 72 тонны блинчиков с ягодной начинкой и 15 тонн блинчиков с творожной начинкой.

Ответ: 2685 тыс. руб.

Приведём решение Дмитрия Гущина.

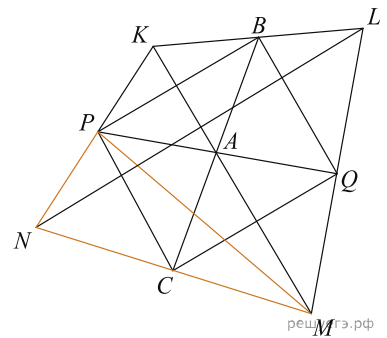
Тонна блинчиков с творожной начинкой приносит 35 тыс. руб., а тонна блинчиков с ягодной— 30тыс.руб. При этом 1 тонне блинчиков с творожной начинкой соответствует 1,2 тонны блинчиков с ягодной начинкой. Заметим, что $1т \cdot 35\text{тыс.руб.} < 1,2т \cdot 30\text{тыс.руб.} = 36т \cdot 1\text{тыс.руб.}$, поэтому более выгодно производить блинчики с ягодной начинкой. Значит, блинчиков с творожной начинкой необходимо производить 15 тонн, а блинчиков с ягодной начинкой— $90-15 \cdot 1,2=72$ тонны, что даст $15 \cdot 35 + 72 \cdot 30 = 2685$ тыс. руб. прибыли.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i>	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> ИЛИ при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> и использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка B — середина отрезка KL , точка C — середина отрезка NM . Заметим, что по теореме о средней линии отрезки BP и CQ параллельны диагонали LM и равны её половине. Поэтому $PBQC$ — параллелограмм. Его диагонали точкой пересечения делятся пополам. Значит, эта точка лежит на прямой KM . Обозначим эту точку A . Точки P и Q равноудалены от точки A , а значит, и от прямой KM . Таким образом, и вершины N и L равноудалены от прямой KM . Таким образом, площади треугольников NKM и KLM равны. Следовательно,



$$S_{MPN} = \frac{1}{2} S_{NKM} = \frac{1}{4} S_{KLMN}.$$

Что и требовалось доказать.

б) Имеем:

$$S_{PBQC} = \frac{1}{2} S_{KLMN} = 2S_{PMN} = 12\sqrt{3},$$

$$PB = \frac{1}{2} NL = 4, \quad BQ = \frac{1}{2} KM = 6,$$

$$S_{PBQC} = PB \cdot BQ \cdot \sin \angle PBQ = 4 \cdot 6 \cdot \sin \angle PBQ.$$

Следовательно, $\sin \angle PBQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $\cos \angle PBQ = \pm \frac{1}{2}$. Отсюда, по теореме косинусов, диагонали четырехугольника $PBQC$ равны $\sqrt{4^2 + 6^2 \pm 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}}$. Без ограничения общности можно считать, что $PQ = \sqrt{76}$, $BC = \sqrt{28}$. Далее, по формуле площади четырехугольника

$$S_{PBQC} = \frac{1}{2} \sqrt{76} \cdot \sqrt{28} \cdot \sin \angle PAC.$$

Получаем, что

$$\sin \angle PAC = \frac{12\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{76}\sqrt{28}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{133}}.$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{133}}$.

Критерии оценивания ответа на задание С5	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	4
Рассмотрены все возможные случаи. Получен верный ответ, но решение либо содержит пробелы, либо вычислительную ошибку или опisku.	3
Рассмотрены все возможные случаи. Получен ответ, но решение содержит ошибки.	2
Рассмотрены некоторые случаи. Для рассмотренных случаев получен ответ, возможно неверный из-за ошибок.	1
Все прочие случаи.	0
Максимальное количество баллов	4

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 + |y| = 16, \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Полагая $u = x - 1$, получим систему

$$\begin{cases} u^2 + |y| = 16, \\ u^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

имеющую то же количество решений. Кроме того, если пара чисел $(u; y)$ — решение системы, то и пары чисел $(u; -y)$, $(-u; y)$, $(-u; -y)$ также являются решениями системы. Таким образом, если $u \neq 0$ и $y \neq 0$, то число решений кратно четырем. Значит, если система имеет ровно 6 решений, то либо $u = 0$, либо $y = 0$.

Если $u = 0$, то $y = \pm 16$, следовательно, $a = \pm 16$. Система

$$\begin{cases} u^2 + |y| = 16, \\ u^2 + y^2 = 256 \end{cases}$$

имеет два решения: $(0; 16)$, $(0; -16)$, поэтому этот случай не подходит.

Если $y = 0$, то $u^2 = 16$, следовательно, $a = \pm 4$. Получаем систему:

$$\begin{cases} u^2 + |y| = 16, \\ u^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = |y|, \\ u^2 + |y| = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ y = 1, \\ y = -1, \\ u^2 + |y| = 16. \end{cases}$$

Она имеет 6 решений, поскольку каждому значению y соответствует два разных значения u .

Ответ: $a = -4, a = 4$.

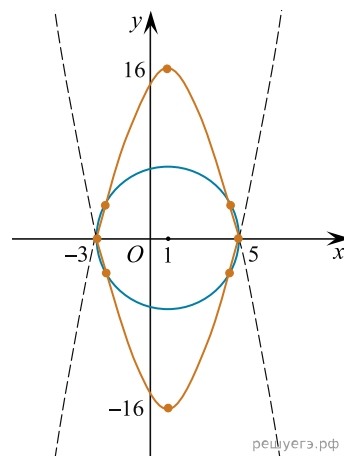
Приведем идею графического решения.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 + |y| = 16, \\ (x-1)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает части двух парабол (см. рис.):

$$y = \begin{cases} 16 - (x-1)^2, & y \geq 0, \\ (x-1)^2 - 16, & y < 0. \end{cases}$$



Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(1; 0)$.

На рисунке видно*, что шесть решений системы получают-ся, только если окружность проходит через точки $(-3; 0)$ и $(5; 0)$, пересекая части параболы еще в четырех точках. При этом радиус окружности равен 4, откуда $a = -4$ или $a = 4$.

*) Докажем это. Рассмотрим на отрезке $[-3; 5]$ функции:

$$f(x) = 16 - (x-1)^2 \quad \text{и}$$

$$g(x) = \sqrt{a^2 - (x-1)^2}.$$

Их графиками являются соответственно часть параболы и верхняя полуокружность с центром в точке $(1; 0)$ радиусом $|a|$.

При любом значении параметра a справедливо следующее:

а) Графики функций симметричны относительно прямой $x=1$, поскольку эта прямая является осью симметрии параболы, и центр окружности лежит на этой прямой.

б) Функции f и g не могут иметь больше четырех общих точек, поскольку уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не больше четырех решений. Действительно,

$$\begin{aligned} 16 - (x-1)^2 &= \sqrt{a^2 - (x-1)^2} \Rightarrow (16 - (x-1)^2)^2 = a^2 - (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^4 - 31(x-1)^2 - a^2 = 0, \\ 16 - (x-1)^2 &= -\sqrt{a^2 - (x-1)^2} \Rightarrow (16 - (x-1)^2)^2 = a^2 - (x-1)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-1)^4 - 31(x-1)^2 - a^2 &= 0, \quad 16 - (x-1)^2 = \sqrt{a^2 - (x-1)^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (16 - (x-1)^2)^2 = a^2 - (x-1)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-1)^4 - 31(x-1)^2 - a^2 = 0, \end{aligned}$$

а уравнение четвертой степени имеет не больше четырех корней.

в) Из пунктов а) и б) следует, что слева от прямой $x=1$ графики функций имеют не более двух общих точек, и каждой общей точке графиков при $x < 1$ соответствует симметричная относительно прямой $x=1$ общая точка графиков.

При $a = \pm 4$ функции f и g обладают следующими свойствами:

г) Функции f и g в точке $x=-3$ принимают одно и то же значение, а потому точка $(-3; 0)$ и симметричная ей точка

$(5; 0)$ являются общими точками графиков.

д) Правые касательные лучи к графикам в точке $x=-3$ составляют с осью абсцисс разные углы, поскольку касательный луч к окружности вертикален, а касательный луч к параболе — нет.

е) Из пунктов г) и д) следует, что на правой полуокрестности точки $x=-3$ график функции f лежит ниже графика функции g .

ё) В точке $x=1$ график функции f лежит выше графика функции g (вершина параболы лежит над окружностью), поскольку $f(1)=16$, $g(1)=2$.

ж) Из пунктов е) и ё) следует, что на интервале $(-3; 1)$ графики функций f и g имеют общую точку, а потому имеют и симметричную ей относительно прямой $x=1$ общую точку на интервале $(1; 5)$.

з) Из пунктов б) и ж) следует, что графики функций f и g на отрезке $[-3; 5]$ имеют четыре общие точки, а больше четырех общих точек быть не может.

и) Рассмотрим теперь функции $-f$ и $-g$, их графики симметричны графикам функций f и g относительно оси абсцисс (на рисунке это парабола, вершина которой лежит ниже оси абсцисс, и нижняя полуокружность). Проводя аналогичные рассуждения получим, что при $a=\pm 4$ графики функций $-f$ и $-g$ имеют на отрезке $[-3; 5]$ имеют ровно четыре общие точки.

к) Точки $(-3; 0)$ и $(5; 0)$ являются общими для графиков f и g и $-f$ и $-g$, поэтому из пунктов з) и и) следует, что при $a=\pm 4$ система уравнений $(x-1)^2 + |y| = 16$, $(x-1)^2 + y^2 = a^2$ имеет ровно шесть решений.

Осталось показать, что прочие значения параметра не подходят. Оставим это читателю в качестве упражнения.

Примечание Дмитрия Гушина.

Обратим внимание читателя, что использовать графический способ решения задач можно только в том случае, когда «увиденные» на графиках свойства либо:

а) очевидны: например, окружность, заключающая вершину параболы, имеет с ней ровно две общие точки;

б) изучены в школьном курсе: например, прямая, имеющая единственную общую точку с окружностью, является касательной к ней;

в) напрямую следуют из изученного материала: квадратичная функция является выпуклой вверх или вниз (это доказывается путем устного взятия второй производной).

Если вы не можете в один-два шага устно объяснить какой-то снятый с рисунка факт, считать его доказанным нельзя. Скажем, невертикальную прямую, имеющую единственную общую точку с параболой, не следует без необходимости называть касательной: проверяющий ЕГЭ эксперт может посчитать это необоснованным. В таком случае на апелляции вам поможет, только если вы объясните, как

быстро устно прийти к такому заключению или в каком учебнике упомянуто это свойство. Другой пример: на рисунке изображена окружность с центром, лежащим внутри параболы на ее оси, имеющая с параболой ровно две общие точки. По рисунку нельзя заключать, что эти точки являются точками касания. А потому и заключение, что при небольшом увеличении радиуса окружности точек пересечения станет четыре не будет обоснованным. Также из рисунка нельзя делать вывод о том, могут ли окружность и парабола иметь ровно три точки касания и т. д.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Например 555 и 875.

б) Для чисел $A = B = 99999$ сумма равна $5 \cdot 9^2 = 405$. Для любых других чисел одно из произведений будет не больше $9 \cdot 8 = 72$ и сумма произведений будет не больше

$$72 + 4 \cdot 9^2 = 396 < 400.$$

в) Запишем число от 1 до 260 в виде $1 + 9n + x$, где $x \in [0; 8]$. Тогда $n \leq 28$.

Если $n \leq 18$, выберем две цифры s, t для которых $s + t = n$. Тогда числа $\overline{1stx}$ и $\overline{1991}$ дадут

$$1 + 9s + 9t + x = 1 + 9n + x.$$

Если $n \in [19; 27]$, выберем две цифры s, t для которых $s + t = n - 9$. Тогда числа $\overline{9st(x+1)}$ и $\overline{9991}$ дадут

$$81 + 9s + 9t + x + 1 = 1 + 9n + x.$$

Пусть, наконец, $n = 28$. Нам осталось записать в нужном виде числа от 253 до 260. Сделаем это:

$$9992, 9995 \mapsto 253;$$

$$9994, 9985 \mapsto 254;$$

9993, 9994 $\mapsto$ 255;

9998, 9965 $\mapsto$ 256;

9992, 9997 $\mapsto$ 257;

9993, 9995 $\mapsto$ 258;

9992, 9998 $\mapsto$ 259;

9995, 9977 $\mapsto$ 260.

Ответ: а) да; б) нет; в) да.
