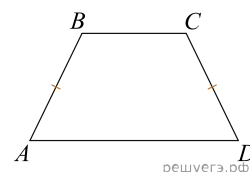


Вариант 218

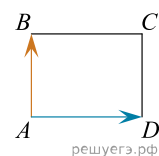
№ 1.

Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.



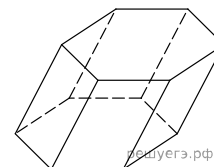
№ 2.

Две стороны прямоугольника $ABCD$ равны 6 и 8. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AD}$.



№ 3.

Найдите объем призмы, в основаниях которой лежат правильные шестиугольники со сторонами 2, а боковые ребра равны $2\sqrt{3}$ и наклонены к плоскости основания под углом 30° .



№ 4.

Фабрика выпускает сумки. В среднем 8 сумок из 100 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

№ 5.

Первый игральный кубик обычный, а на гранях второго кубика нет чётных чисел, а нечётные числа 1, 3 и 5 встречаются по два раза. В остальном кубики одинаковые. Один случайно выбранный кубик бросают два раза. Известно, что в каком-то порядке выпали 3 и 5 очков. Какова вероятность того, что бросали второй кубик?

№ 6.

Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x-1} = 5$.

№ 7.

Найдите значение выражения $2\sqrt{3}\operatorname{tg}(-300^\circ)$.

№ 8.

Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $y = 28x^2 + bx + 15$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

№ 9.

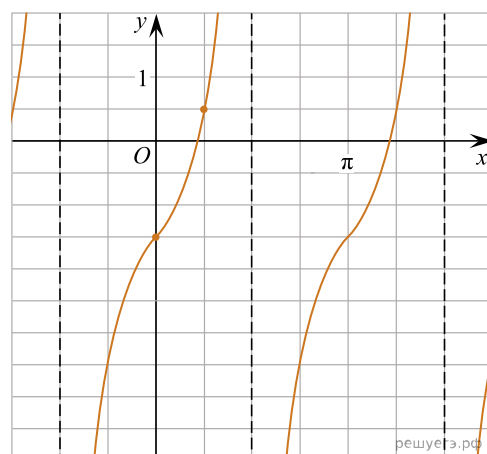
Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полета мячика, выраженная в метрах, определяется формулой $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 20$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с²). При каком наименьшем значении угла α (в градусах) мячик пролетит над стеной высотой 4 м на расстоянии 1 м?

№ 10.

В сосуд, содержащий 5 литров 12-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 7 литров воды. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = a \operatorname{tg} x + b$. Найдите b .



№ 12.

Найдите точку минимума функции $y = 9x^2 - x^3$.

№ 13.

а) Решите уравнение $(\sqrt{x^2 + 2x - 7} - 1) \cdot \log_3(9 + 2x - x^2) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 5; 2^{\sqrt{2}}]$.

№ 14.

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным 6, на ребре AA_1 взята точка M так, что $\frac{AM}{MA_1} = \frac{1}{2}$. На ребре $D_1 C_1$ взята точка N так, что $\frac{D_1 N}{NC_1} = \frac{1}{2}$.

а) Докажите, что прямые MB_1 и CN перпендикулярны.

б) Найдите расстояние от точки M до прямой CN .

№ 15.

Решите неравенство: $\frac{x^2}{\log_{5-x} x} \leq (5x - 4) \cdot \log_x(5 - x)$.

№ 16.

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1500 тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2300 тысяч рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

№ 17.

Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы углов BAD и BCD пересекаются в точке O . Точки M и N отмечены на боковых сторонах AB и CD соответственно. Известно, что $AM = MO$ и $CN = NO$.

а) Докажите, что точки M , N и O лежат на одной прямой.

б) Найдите $AM : MB$, если известно, что $AO = OC$ и $BC : AD = 1 : 7$.

№ 18.

Найдите все такие значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{a \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cos x + \sin x}$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

№ 19.

а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n , для которых $m \leq n$ и $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{14}$.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27631	160
2	27710	0
3	27108	18
4	282857	0.92
5	508887	0.8
6	77384	0.3
7	26762	6
8	119973	-33
9	28003	30
10	99571	5
11	509143	-1.5
12	77440	0

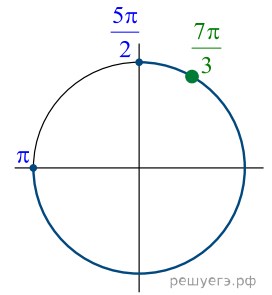
№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. а) Последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{\lg x - 1}} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x = 0, \\ \lg x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos x, \\ \lg x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \sqrt{3}\cos x, \\ \lg x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0, \\ \lg x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sqrt{3} = 0, \\ \lg x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\
&\frac{2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos x, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \sqrt{3}\cos x, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sqrt{3} = 0, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos x, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \sqrt{3}\cos x, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sqrt{3} = 0, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos x, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \sqrt{3}\cos x, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x \cos x - \sqrt{3}\cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - \sqrt{3} = 0, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ \operatorname{tg} x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$



б) Выберем корни при помощи единичной окружности (см. рис.). Подходит число $\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{7\pi}{3}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Грани AA_1B_1B и DD_1C_1C — параллельны. В грани AA_1B_1B проведём прямую BM_1 , параллельную CN . Пусть G — точка пересечения прямых MB_1 и BN_1 , $N_1B_1 = NC_1 = MA_1$, следовательно, треугольники BB_1N_1 и B_1C_1M равны. Таким образом, $\angle B_1BN_1 = \angle A_1B_1M$, значит,

$$\angle MB_1B = 90^\circ - \angle A_1B_1M = 90^\circ - \angle B_1BN_1,$$

то есть $\angle B_1BN_1 + \angle MB_1B = 90^\circ$, следовательно, $\angle BGB_1 = 90^\circ$.

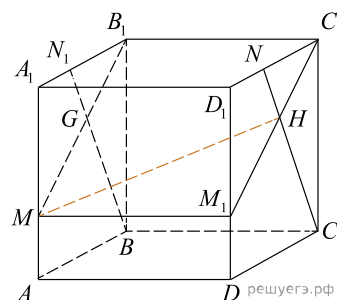
б) Пусть MM_1 — перпендикуляр, опущенный из точки M на плоскость DD_1C_1C . Тогда прямые MM_1 и AD параллельны, M_1C_1 и MB_1 параллельны. Пусть H — точка пересечения прямых CN и M_1C_1 . По теореме о трёх перпендикулярах прямые MH и CN перпендикулярны, и, следовательно, отрезок MH — искомое расстояние. Имеем:

$$D_1M_1 = A_1M = \frac{2}{3}AA_1 = 4, \quad CN = C_1M_1 = \sqrt{C_1D_1^2 + D_1M_1^2} = 2\sqrt{13}, \quad D_1M_1 = A_1M = \frac{2}{3}AA_1 = 4, \\ CN = C_1M_1 = \sqrt{C_1D_1^2 + D_1M_1^2} = 2\sqrt{13},$$

$$\frac{C_1H}{CC_1} = \frac{C_1N}{CN}, \quad C_1N = A_1M = 4, \quad C_1H = \frac{C_1N \cdot CC_1}{CN} = \frac{12\sqrt{13}}{13}, \quad \frac{C_1H}{CC_1} = \frac{C_1N}{CN}, \quad C_1N = A_1M = 4, \\ C_1H = \frac{C_1N \cdot CC_1}{CN} = \frac{12\sqrt{13}}{13},$$

$$M_1H = M_1C_1 - C_1H = \frac{14\sqrt{13}}{13}, \quad MH = \sqrt{MM_1^2 + M_1H^2} = \frac{2\sqrt{2158}}{13}, \quad M_1H = M_1C_1 - C_1H = \frac{14\sqrt{13}}{13}, \\ MH = \sqrt{MM_1^2 + M_1H^2} = \frac{2\sqrt{2158}}{13}.$$

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{2158}}{13}$.



№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек. ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Перейдём к основанию $5-x$, разложим квадратный трёхчлен на множители, воспользуемся методом рационализации и методом интервалов:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\log_{5-x} x} \leq \frac{5x-4}{\log_{5-x} x} &\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{\log_{5-x} x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{\log_{5-x} x} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-4)(x-1)}{(5-x-1)(x-1)} \leq 0, \\ 5-x > 0, \\ x > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-4)(x-1)}{(4-x)(x-1)} \leq 0, \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4, \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < x < 4, \\ 4 < x < 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-4)(x-1)}{(5-x-1)(x-1)} \leq 0, \\ 5-x > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-4)(x-1)}{(4-x)(x-1)} \leq 0, \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4, \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < x < 4, \\ 4 < x < 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-4)(x-1)}{(5-x-1)(x-1)} \leq 0, \\ 5-x > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-4)(x-1)}{(4-x)(x-1)} \leq 0, \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 4, \\ 0 < x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 1 < x < 4, \\ 4 < x < 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть долг в июле 2030 года составит 5S тыс.руб., тогда в первые пять лет долг должен уменьшаться на $\frac{1500-5S}{5} = 300-S$ тыс.руб., а в следующие пять лет — на 5 тыс.руб. Составим таблицу.

Год	Долг в январе (после начисления процентов), тыс. руб.	Выплата, тыс. руб.	Долг в июле, тыс. руб.
2025			1500
2026	$1,1 \cdot 1500$	$1,1 \cdot 1500 - (1200 + S)$	$1200 + S$
2027	$1,1(1200 + S)$	$1,1 \cdot (1200 + S) - (900 + 2S)$	$900 + 2S$
2028	$1,1(900 + 2S)$	$1,1 \cdot (900 + 2S) - (600 + 3S)$	$600 + 3S$
2029	$1,1(600 + 3S)$	$1,1(600 + 3S) - (300 + 4S)$	$300 + 4S$
2030	$1,1(300 + 4S)$	$1,1(300 + 4S) - 5S$	5S
2031	$1,1 \cdot 5S$	$1,1 \cdot 5S - 4S$	4S

...	...	...	...
2034	$1,1 \cdot 2S$	$1,1 \cdot 2S - S$	S
2035	$1,1 \cdot S$	$1,1 \cdot S - 0$	0

Выплаты в первые пять лет представляют собой арифметическую прогрессию, найдём их сумму:

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{1,1 \cdot 1500 - (1200 + S)}_{1\text{-я выплата}} + \underbrace{1,1 \cdot (1200 + S) - (900 + 2S)}_{2\text{-я выплата}} + \underbrace{1,1 \cdot (900 + 2S) - (600 + 3S)}_{3\text{-я выплата}} + \underbrace{1,1 \cdot (600 + 3S) - (300 + 4S)}_{4\text{-я выплата}} + \underbrace{1,1 \cdot (300 + 4S) - 5S}_{5\text{-я выплата}} = \\
 &= \frac{1,1 \cdot 1500 - (1200 + S) + 1,1 \cdot (300 + 4S) - 5S}{2} \cdot 5 = \\
 &= \frac{780 - 1,6S}{2} \cdot 5 = (390 - 0,8S) \cdot 5 = 1950 - 4S.
 \end{aligned}$$

Выплаты в последние пять лет также представляют собой арифметическую прогрессию, найдём их сумму:

$$\begin{aligned}
 B_{2031-2035} &= \underbrace{1,1 \cdot 5S - 4S}_{6\text{-я выплата}} + \dots + \underbrace{1,1 \cdot 2S - S}_{9\text{-я выплата}} + \underbrace{1,1 \cdot S}_{10\text{-я выплата}} = \\
 &= \frac{1,1 \cdot 5S - 4S + 1,1 \cdot S}{2} \cdot 5 = \frac{2,6S}{2} \cdot 5 = 6,5S. \quad B_{2031-2035} = \\
 &= \underbrace{1,1 \cdot 5S - 4S}_{6\text{-я выплата}} + \dots + \underbrace{1,1 \cdot 2S - S}_{9\text{-я выплата}} + \underbrace{1,1 \cdot S}_{10\text{-я выплата}} = \\
 &= \frac{1,1 \cdot 5S - 4S + 1,1 \cdot S}{2} \cdot 5 = \frac{2,6S}{2} \cdot 5 = 6,5S.
 \end{aligned}$$

Сумма всех выплат по условию равна 2300 тыс. руб., тогда

$$1950 - 4S + 6,5S = 2300 \Leftrightarrow 2,5S = 350 \Leftrightarrow 5S = 700.$$

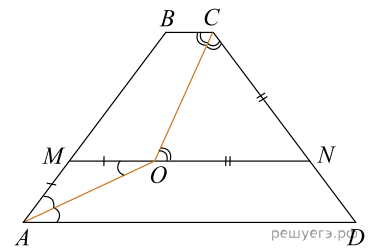
Таким образом, долг в июле 2030 года составит 700 тыс. руб.

Ответ: 700000.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

Решение. а) AO — биссектриса $\angle BAD$, поэтому $\angle MAO = \angle OAD$, и $MA = MO$, следовательно, треугольник AMO равнобедренный, а значит, $\angle MAO = \angle MOA$. Тогда $\angle MOA = \angle OAD$, откуда следует, что отрезок MO параллелен стороне AD , поскольку накрест лежащие углы при секущей AO равны. Аналогично отрезок NO параллелен стороне BC . Следовательно, поскольку стороны BC и AD параллельны, точки M и N лежат на прямой, параллельной основанию и проходящей через точку O . Что и требовалось доказать.



б) Пусть $\angle MAO = \angle OAD = \alpha$, тогда $\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$ и $\angle BCO = 90^\circ - \alpha$.

По сумме углов четырёхугольника $ABCO$:

$$\angle BAO + \angle ABC + \angle BCO + \angle COA = 360^\circ,$$

откуда

$$\alpha + 180^\circ - 2\alpha + 90^\circ - \alpha + \angle COA = 360^\circ,$$

то есть $\angle COA = 90^\circ + 2\alpha$. Треугольник AOC равнобедренный, поэтому

$$\angle CAO = \angle ACO = 45^\circ - \alpha,$$

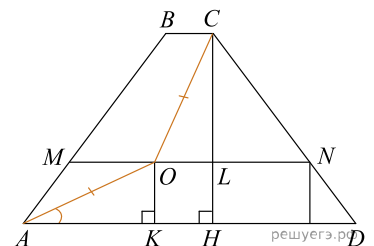
значит,

$$\angle CAD = \angle CAO + \angle OAD = 45^\circ - \alpha + \alpha = 45^\circ.$$

Проведём высоту CH , пусть она пересекается с отрезком MN в точке L . По теореме о пропорциональных отрезках, поскольку отрезок MN параллелен стороне AD , то $AM : MB = HL : LC$.

В треугольнике CAH : $\angle H = 90^\circ$ и $\angle CAH = 45^\circ$, следовательно,

$$\angle ACH = 45^\circ \Rightarrow \angle OCL = \angle ACL - \angle ACO = 45^\circ - (45^\circ - \alpha) = \alpha.$$



Проведём перпендикуляр OK к AD . Треугольники AOK и COL равны по гипотенузе ($AO = CO$ по условию) и острому углу ($\angle OAK = \angle OCL = \alpha$), значит, $CL = AK$.

Четырёхугольник $OLHK$ — параллелограмм (прямоугольник), поскольку отрезки OL и AD параллельны, отрезок OK перпендикулярен стороне AD и отрезок LH перпендикулярен стороне AD . Следовательно, $OK = LH$. Поэтому

$$AM : MB = OK : AK = \tan \widehat{OAK} = \tan \alpha.$$

В треугольнике ACH : $\angle ACH = \angle CAH = 45^\circ$, значит, $AH = CH$.

Трапеция равнобедренная, поэтому

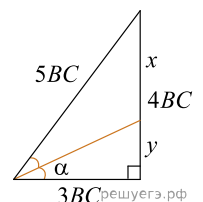
$$AH = \frac{AD + BC}{2} = \frac{7BC + BC}{2} = 4BC,$$

откуда $HD = 3BC$. Тогда по теореме Пифагора в треугольнике CHD :

$$CD^2 = (3BC)^2 + (4BC)^2 = 25BC^2,$$

откуда $CD = 5BC = AB$. Значит, α — это половина угла в египетском треугольнике напротив большего катета. Проведём в таком треугольнике биссектрису и воспользуемся её свойством:

$$\frac{x}{y} = \frac{5BC}{3BC} = \frac{5}{3}.$$



Тогда $x = \frac{5}{3}y$, при этом $x + y = 4BC$, следовательно,

$$\frac{5}{3}y + y = 4BC \Leftrightarrow \frac{8}{3}y = 4BC \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}BC.$$

Таким образом,

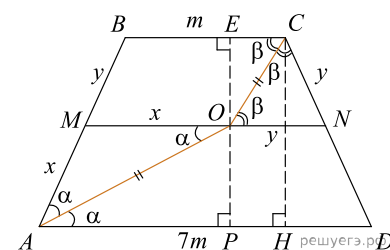
$$\tan \alpha = \frac{\frac{3}{2}BC}{3BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AM : MB = 1 : 2.$$

Ответ: б) 1 : 2.

Приведем решение пункта б) Марины Ивановой (Миасс).

Пусть $\angle MAO = \alpha$, $\angle NCO = \beta$, $BC = m$, $AD = 7m$. В равнобедренном треугольнике AMO положим $AM = MO = x$, тогда $AO = 2x \cos \alpha$. Далее, пусть $CN = ON = y$. По свойству равнобедренной трапеции $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, то есть $\alpha + \beta = 90^\circ$, тогда в равнобедренном треугольнике CNO имеем:

$$CO = 2y \cos \beta = 2y \cos(90^\circ - \alpha) = 2y \sin \alpha.$$



Приравнявая длины отрезков AO и CO , получаем, что $\frac{x}{y} = \tan \alpha$, то есть $AM : MB = \tan \alpha$.

Через точку C проведем высоту CH , а через точку O — высоту EP , где точка E лежит на BC . Тогда

$$HD = \frac{AD - BC}{2} = \frac{7m - m}{2} = 3m,$$

значит, $AH = 7m - 3m = 4m$. В прямоугольном треугольнике AOP находим, что $\angle AOP = 90^\circ - \alpha = \beta$. Тогда треугольники AOP и CDE равны по гипотенузе и острому углу. Откуда $AP = EO$, $OP = EC = PH$ и

$$CH = EO + OP = AP + PH = AH = 4m.$$

В треугольнике CHD :

$$\frac{CH}{HD} = \frac{4m}{3m} = \frac{4}{3} = \tan \widehat{CDH} = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

Пусть $\tan \alpha = t$, получаем уравнение:

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = -2. \end{cases}$$

Решение $t = -2$ не подходит, поскольку угол α острый. Следовательно, $\tan \alpha = \frac{1}{2}$, а потому искомое отношение равно $1:2$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a .	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{a \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cos x + \sin x} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sin x + \cos x = a \cos x + \sin x, \\ a \sin x + \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned} a \sin x + \cos x = a \cos x + \sin x &\Leftrightarrow (a-1) \sin x - (a-1) \cos x = 0 \Leftrightarrow (a-1)(\sin x - \cos x) = 0. & a \sin x + \cos x = a \cos x + \sin x &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-1) \sin x - (a-1) \cos x = 0 \Leftrightarrow (a-1)(\sin x - \cos x) = 0. & a \sin x + \cos x = a \cos x + \sin x &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-1) \sin x - (a-1) \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a-1)(\sin x - \cos x) = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая.

Пусть $a = 1$, тогда из неравенства

$$\sin x + \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ принадлежат два числа $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$.

Пусть $a \neq 1$, тогда имеем:

$$\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

В первой серии не содержится корней, лежащих на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$. Среди корней, содержащихся во второй серии, отрезку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$ принадлежит одно число $\frac{5\pi}{4}$. Подставляя его в неравенство, получаем: $-a\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$, откуда $a \leq -1$.

Ответ: $a \leq -1$, $a = 1$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Приведем пример такой суммы: $\frac{33}{100} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100}$.

б) Приведем пример такой суммы: $\frac{15}{91} = \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{91} + \frac{1}{182}$.

в) Пусть $m = dp$, $n = dq$, где d — наибольший общий делитель чисел m и n . Тогда $\frac{1}{dp} + \frac{1}{dq} = \frac{1}{14}$; $14(p+q) = dpq$. Числа p , q и $p+q$ попарно взаимно простые, поэтому числа p и q являются взаимно простыми делителями числа 14. Получаем следующие варианты:

p	q	d	m	n
-----	-----	-----	-----	-----

1	1	28	28	28
1	2	21	21	42
1	7	16	16	112
1	14	15	15	210
2	7	9	18	63

Ответ:

а) да, например $\frac{33}{100} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{100}$;

б) да, например $\frac{15}{91} = \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{91} + \frac{1}{182}$, или другой пример: $\frac{15}{91} = \frac{1}{7} + \frac{1}{91} + \frac{1}{182} + \frac{1}{273} + \frac{1}{546}$;

в) 28 и 28, 21 и 42, 16 и 112, 15 и 210, 18 и 63.
