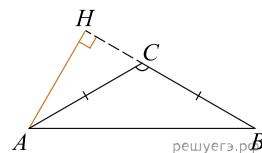


Вариант 219

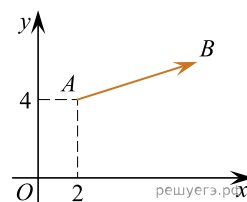
№ 1.

В тупоугольном треугольнике ABC $AC = BC = \sqrt{17}$, AH — высота, $CH = 4$. Найдите $\operatorname{tg} ACB$.



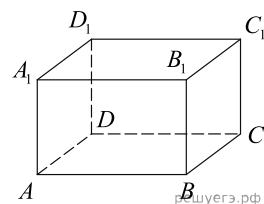
№ 2.

Вектор $\vec{AB}$ началом в точке $A(2;4)$ имеет координаты $(6;2)$. Найдите абсциссу точки B .



№ 3.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 9$, $AD = 12$, $AA_1 = 18$. Найдите синус угла между прямыми $A_1 D_1$ и AC .

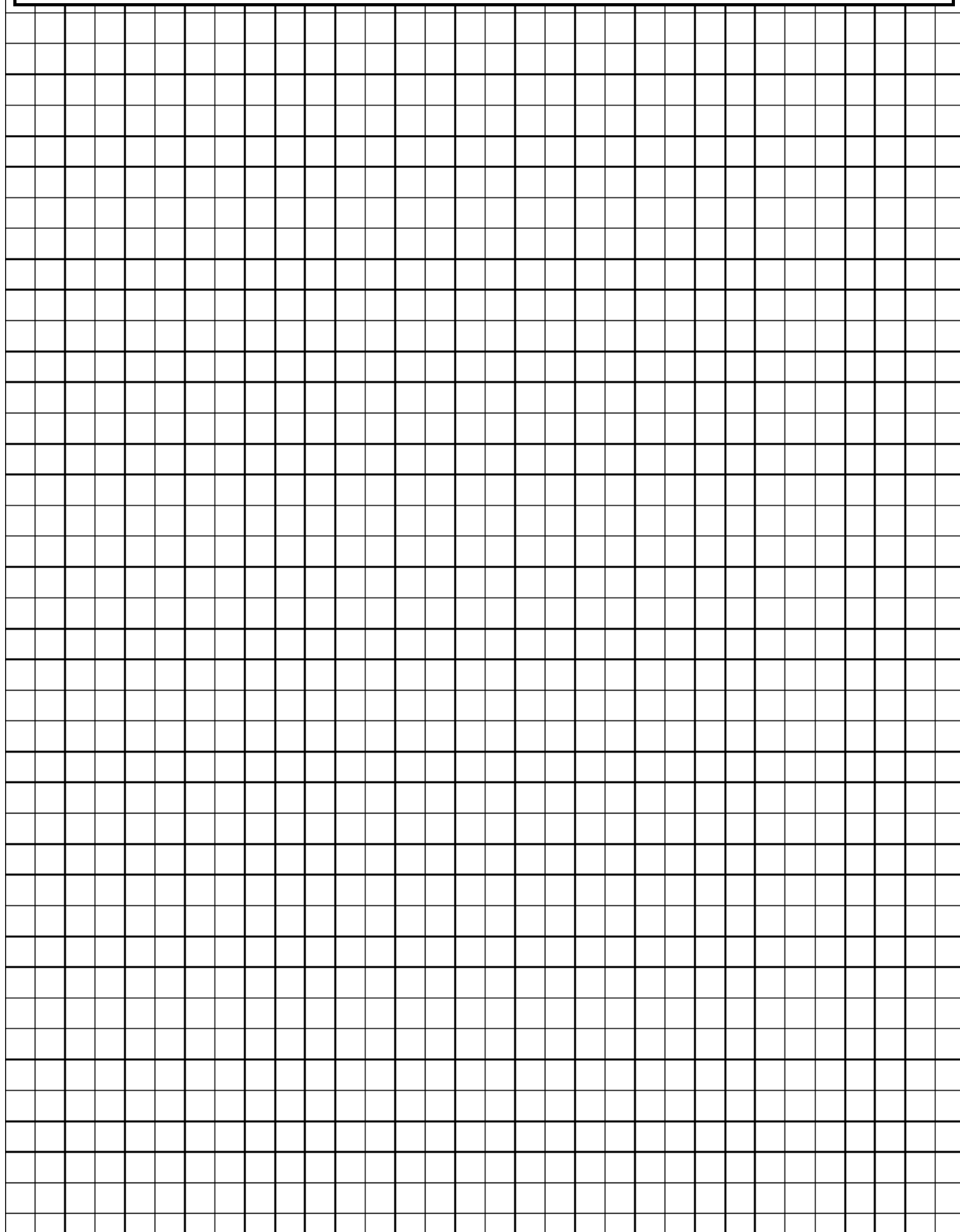


N_o 4.

Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию « A = сумма очков равна 5»?

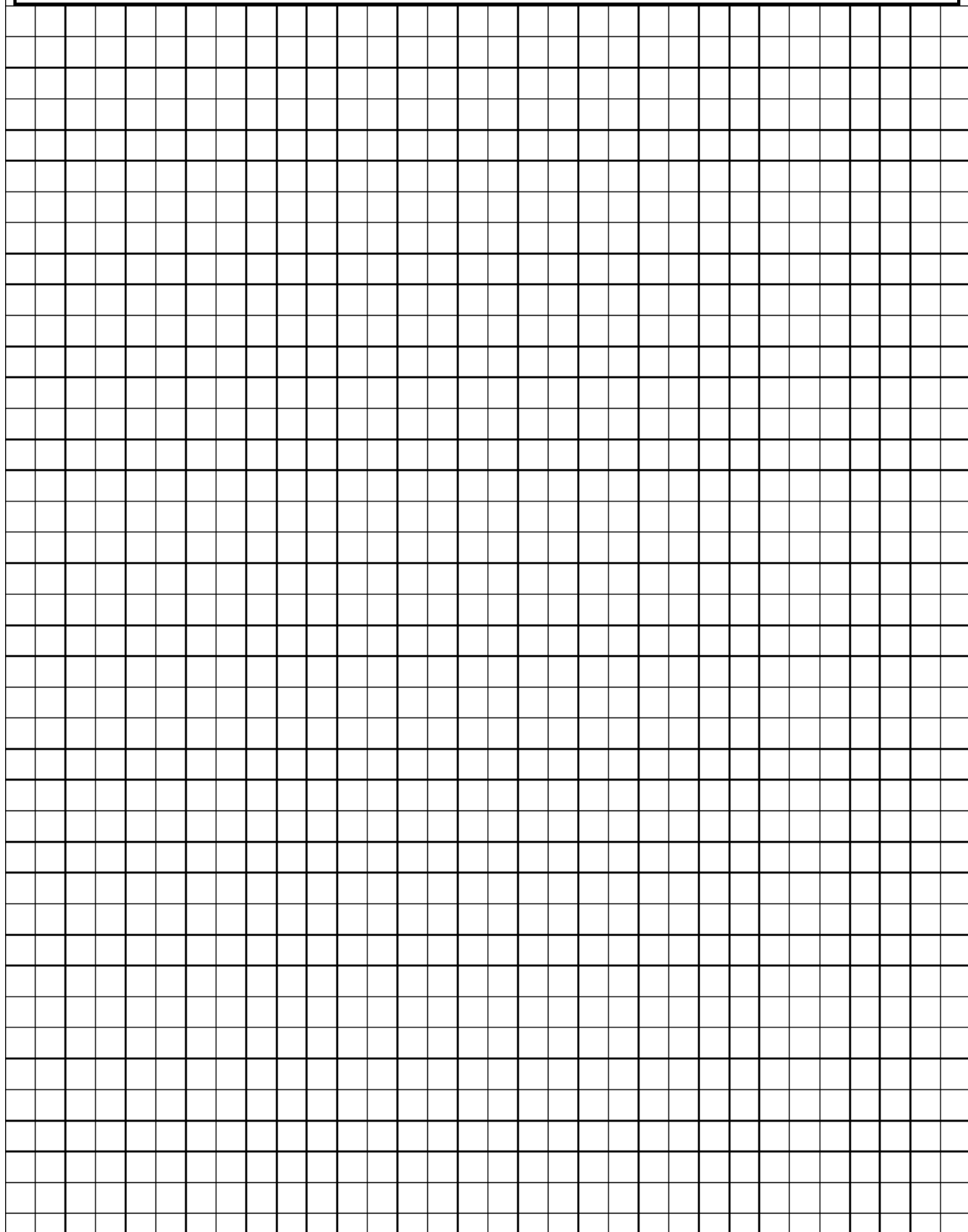
№ 5.

Стрелок стреляет по 4 одинаковым мишеням по одному разу, вероятность промаха 0,2, найдите вероятность что он попадёт в первую мишень, а в 3 оставшиеся промахнется.



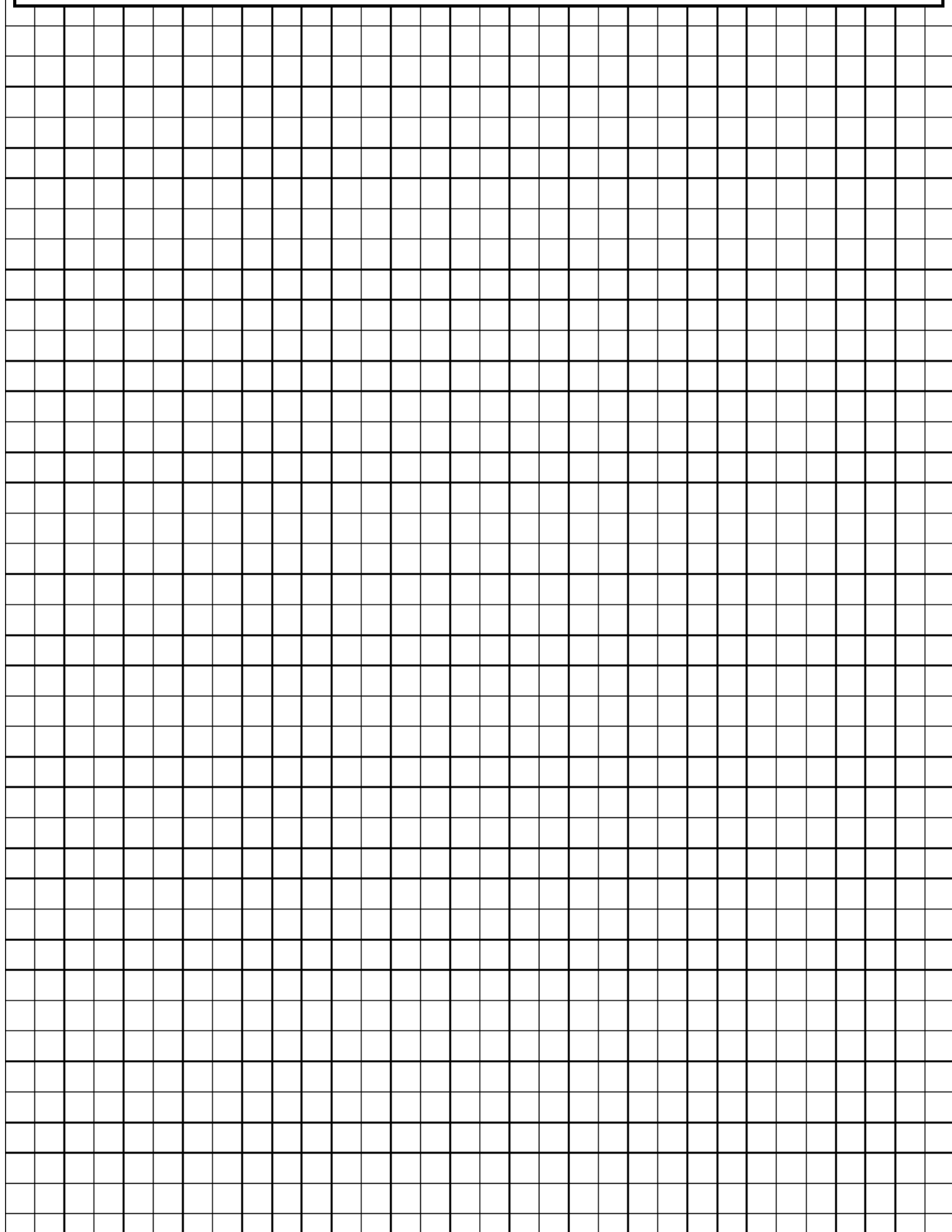
№ 6.

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{15-4x}} = 0,2$.



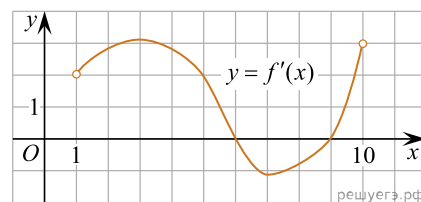
№ 7.

Найдите значение выражения $\sqrt{65^2 - 56^2}$.



№ 8.

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(1; 10)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



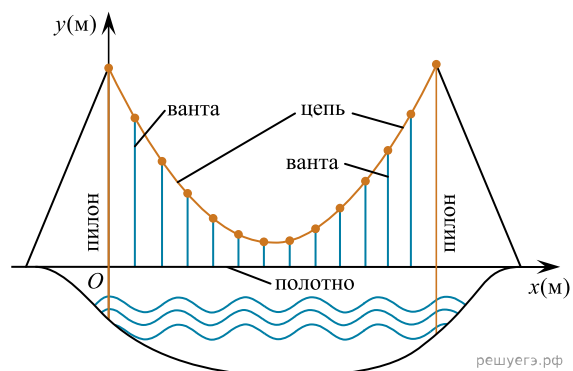
reshyera.ru

№ 9.

На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами.

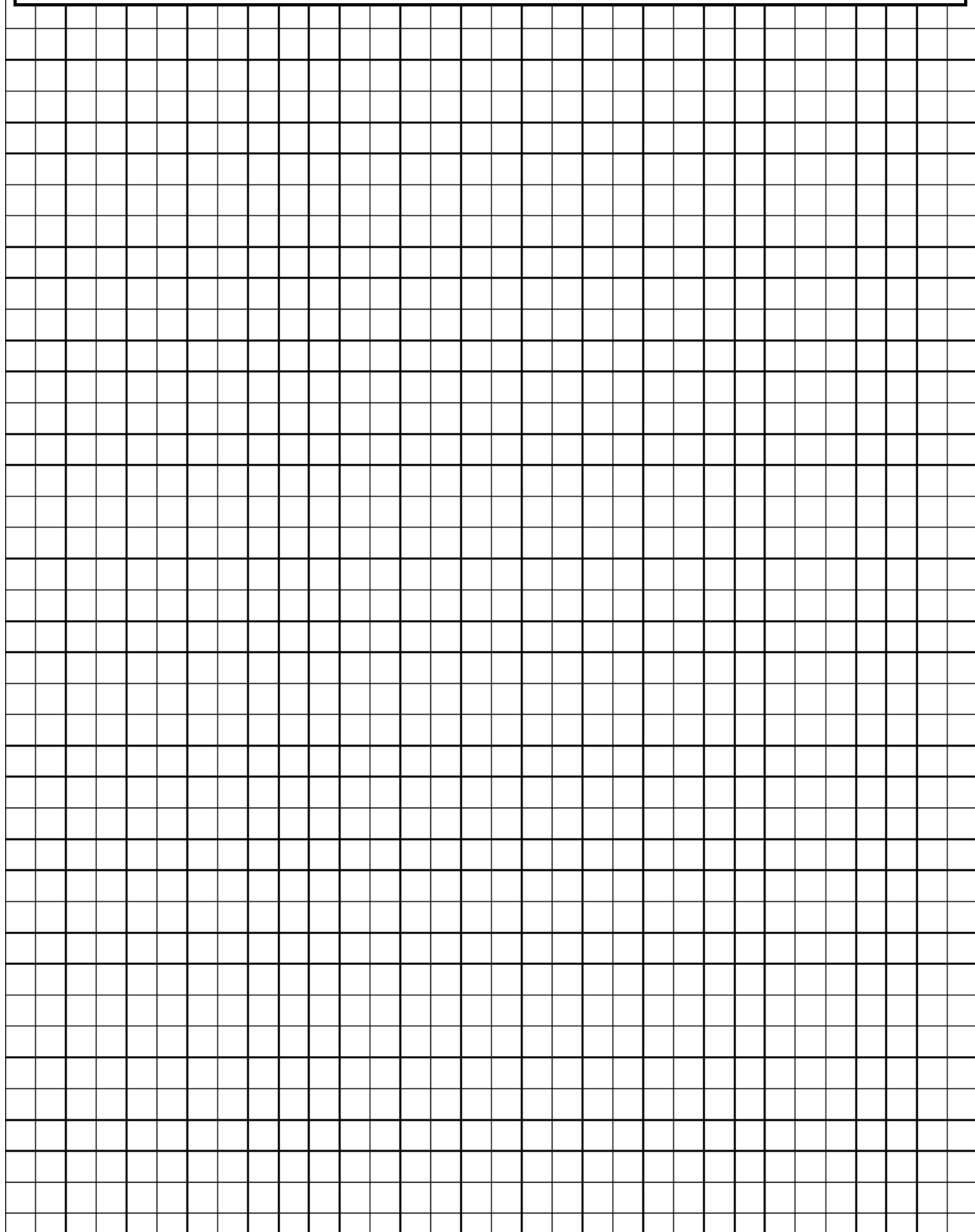
Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке.

В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,005x^2 - 0,74x + 25$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванта, расположенной в 30 метрах от пилон. Ответ дайте в метрах.



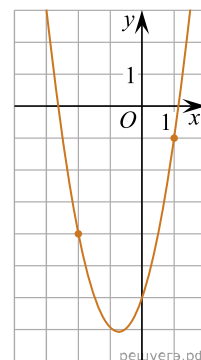
№ 10.

Из городов A и B навстречу друг другу выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в B на 3 часа раньше, чем велосипедист приехал в A , а встретились они через 48 минут после выезда. Сколько часов затратил на путь из B в A велосипедист?



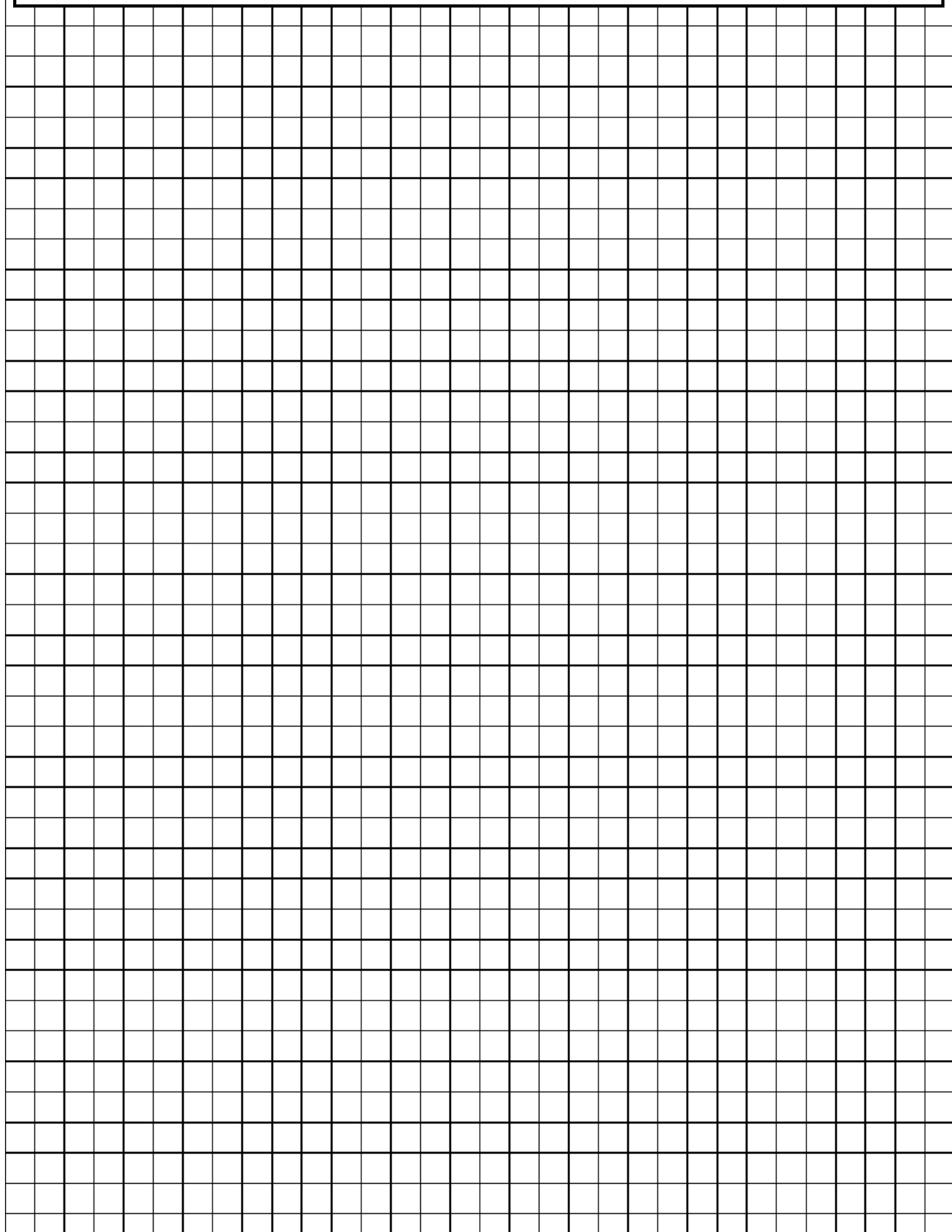
№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx - 6$. Найдите $f(-6)$.



№ 12.

Найдите наибольшее значение функции $y = (x^2 - 10x + 10)e^{10-x}$ на отрезке $[5; 11]$.



№ 13.

а) Решите уравнение $7^{-\cos(\pi+x)} \cdot 14^{\sin(\pi-x)} = 2^{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 14.

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C , $AC=4$, $BC=16$, $AA_1=4\sqrt{2}$. Точка Q — середина ребра A_1B_1 , а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении $1:2$, считая от вершины C_1 . Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M .

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1 .

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ .

№ 15.

Решите неравенство: $\log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x + 1} + 1} + 1.$

Nº 16.

Паром грузоподъемностью 111 тонн перевозит микроавтобусы и грузовики при условии полной загрузки. Количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков. Вес и стоимость одного микроавтобуса составляют 5 тонн и 5 тысяч условных единиц, грузовика — 9 тонн и 4 тысячи условных единиц соответственно. Определите наибольшую возможную суммарную стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом при данных условиях.

№ 17.

Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

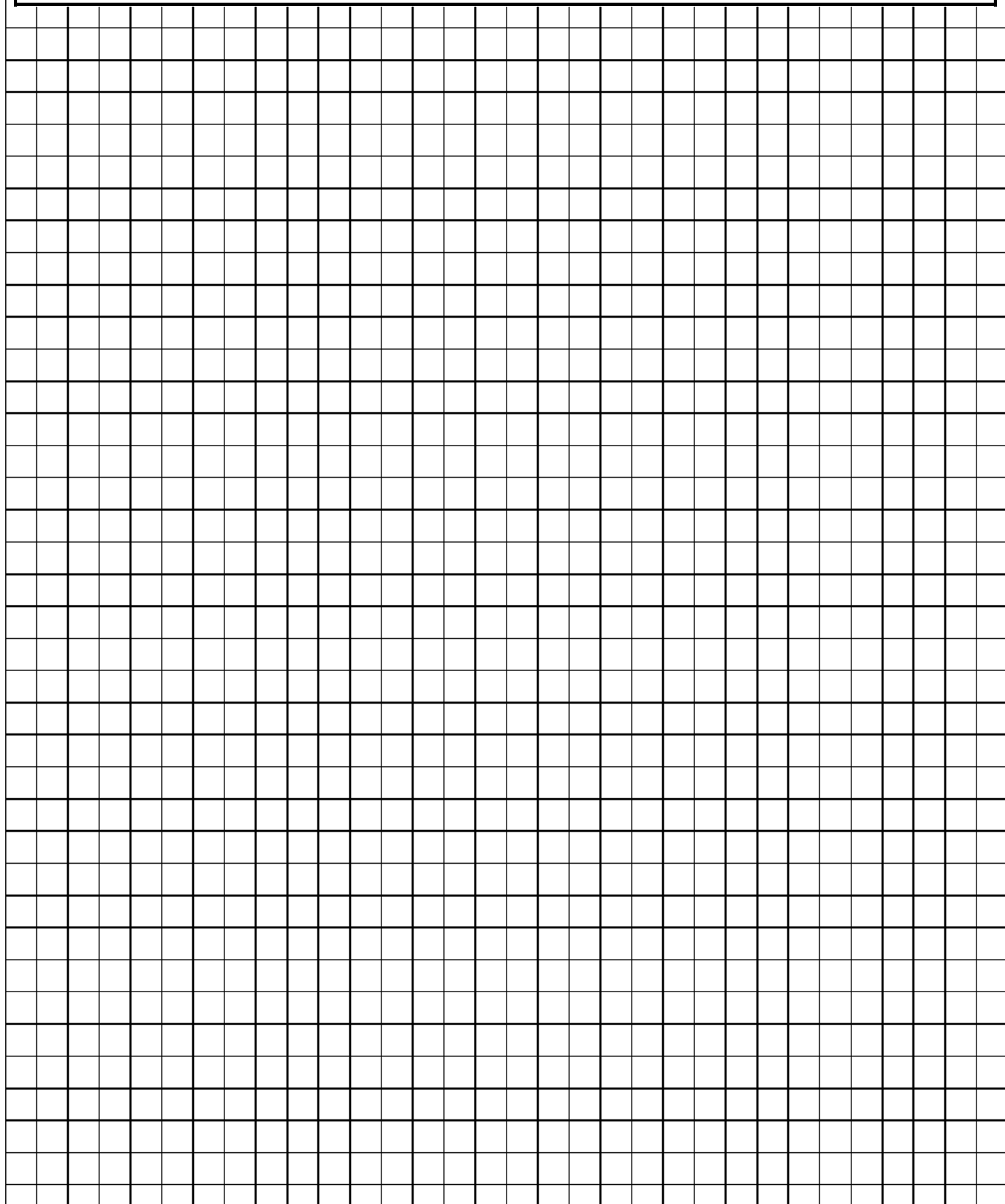
б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB , основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

№ 18.

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sin |\operatorname{arctg} x| + a \cdot \cos \frac{\operatorname{arctg} x}{2} = \frac{a|x|}{\sqrt{1+x^2}}$$

имеет хотя бы одно решение.



№ 19.

В игре число $a = 4$ и число $b = 5$, за ход можно сделать $(a-1; b+2)$ или $(a+2; b-1)$. (новые числа a и b всегда положительные).

а) Можно ли получить число 200 за 100 ходов?

б) Сколько нужно сделать ходов, чтобы получить сумму равную 300.

в) Сколько нужно сделать ходов, чтобы получить максимальную сумму, при этом ни одно число не превышает 200.

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27350	-0.25
2	27724	8
3	502016	0.6
4	320184	4
5	630095	0.0064
6	77373	-2.5
7	26735	33
8	501188	9
9	324467	7.3
10	99592	4
11	508927	48
12	77481	10

№ 13.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последователь- ность всех шагов решения пункта а) и пункта б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Решим уравнение:

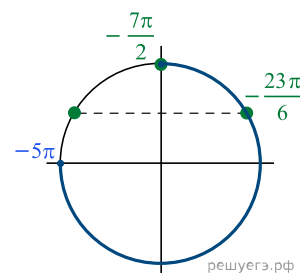
Пусть $t = 4^{\sin x}$, тогда

$$t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = 4. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} 4^{\sin x} = 2, \\ 4^{\sin x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases}$$

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$. Находим: $-\frac{23\pi}{6}, -\frac{7\pi}{2}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{23\pi}{6}; -\frac{7\pi}{2}$.

№ 14.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть R — точка пересечения прямых PQ и A_1C_1 , а K — середина B_1C_1 (см. рис.). Тогда M — точка пересечения прямых AR и CC_1 .

Треугольники FKQ и FC_1R подобны, откуда

$$\frac{C_1R}{KQ} = \frac{C_1P}{KP} = 2,$$

$$C_1R = 2KQ = A_1C_1 = 4.$$

Отрезок C_1M — средняя линия треугольника AA_1R , поскольку $A_1C_1 = C_1R$ и прямые AA_1 и CC_1 параллельны. Значит,

$$C_1M = \frac{A_1A}{2} = \frac{C_1C}{2},$$

то есть M — середина CC_1 .

б) Расстояние от точки A_1 до плоскости APQ равно высоте h пирамиды A_1APQ , опущенной из вершины A_1 .

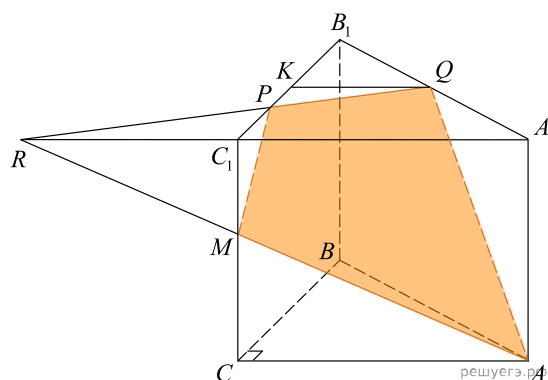
Объём пирамиды A_1APQ : $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{APQ}$.

С другой стороны, объём пирамиды A_1APQ :

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{B_1C_1}{2} \cdot S_{AA_1R} = \frac{1}{3} \cdot \frac{B_1C_1}{2} \cdot \frac{1}{2} AA_1 \cdot A_1R = \frac{128\sqrt{2}}{3}.$$

Значит,

$$h = \frac{128\sqrt{2}}{S_{APQ}}.$$



В треугольнике AQR находим стороны:

$$AQ = QR = 10,$$

$$AR = 4\sqrt{6}.$$

Площадь равнобедренного треугольника AQR равна

$$S_{AQR} = \frac{1}{2} \cdot AR \sqrt{AQ^2 - \frac{AR^2}{4}} = 4\sqrt{114}.$$

Следовательно,

$$h = \frac{128\sqrt{2}}{4\sqrt{114}} = \frac{32\sqrt{57}}{57}.$$

Ответ: $\frac{32\sqrt{57}}{57}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Перейдем в левой части неравенства к логарифмам по основанию 2, используем формулу суммы логарифмов, получим и решим иррациональное неравенство:

$$\begin{aligned}
 & \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_1 \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1} + 1 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_2 \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1} + \log_2 2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} > \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > \sqrt{x + 1} + 1, \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x + 1 < 4, \\ x(x - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 3, \\ \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0. \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_1 \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1} + 1 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_2 \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1}{2} + \log_2 2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} > \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1 > 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > \sqrt{x + 1} + 1, \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x + 1 < 4, \\ x(x - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 3, \\ \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0. \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_1 \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1} + 1 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_2 \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1}{2} + \log_2 2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3}) > \log_2(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 3} > \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{x + 1} + 1 > 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > \sqrt{x + 1} + 1, \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x + 1 < 4, \\ x(x - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x < 3, \\ x \leq 0, \\ x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 0.$$

Ответ: $[-1; 0]$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. Пусть a — количество загруженных микроавтобусов, а b — количество загруженных грузовиков. Поскольку паром перевозит микроавтобусы и грузовики при условии полной загрузки, $5a + 9b = 111$. Частное решение данного уравнения — $a_0 = 222$, $b_0 = -111$, тогда $a = 222 + 9k$, $b = -111 - 5k$, где k — целое число. Так как a и b — натуральные числа, возможны только два значения k : $k = -23$, тогда $a = 15$, $b = 4$, или $k = -24$, тогда $a = 6$, $b = 9$. Так как количество загруженных на паром микроавтобусов составляет не более 70% от количества загруженных на паром грузовиков, получаем, что $a = 6$, $b = 9$. В таком случае суммарная стоимость всех микроавтобусов и грузовиков, перевозимых паромом, равна $6 \cdot 5 + 9 \cdot 4 = 66$ тысяч условных единиц.

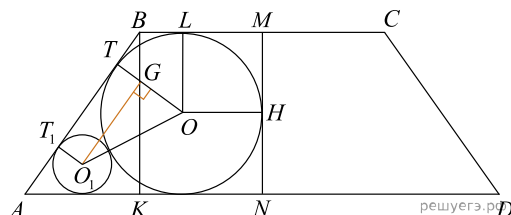
Ответ: 66 тысяч условных единиц.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Из описанности трапеций следует, что $BM + AN = AB + MN$ и $MC + ND = CD + MN$. Поскольку $BM = MC$ и $AN = ND$, получаем, что $AB = CD$.



б) Очевидно, при этих условиях отрезок MN является высотой трапеции и имеет длину 6. Пусть $AN = t$, тогда из описанности трапеции $BMNA$ следует $AB + 6 = t + 5$, откуда $AB = t - 1$. Опустив высоту BK , получим $BK^2 + KA^2 = BA^2$, откуда $(t - 5)^2 + 36 = (t - 1)^2$. Решая это уравнение, получаем $t = 7,5$ и $AB = 6,5$.

Обозначим O центр окружности, вписанной в $BMNA$, центр второй окружности — O_1 , их проекции на сторону AB — за T и T_1 соответственно, радиус второй окружности обозначим r . Тогда TOO_1T_1 — трапеция, в которой $TO = 3$, $T_1O_1 = r$, $OO_1 = 3 + r$.

Опустим из O перпендикуляры OL и OH на BM и MN соответственно. Тогда $OLMH$ — квадрат со стороной 3, поэтому $BL = BT = 5 - 3 = 2$, а $AT = 4,5$. Из подобия треугольников ATO и AT_1O_1 находим тогда, что $AT_1 = 1,5r$ и $TT_1 = 4,5 - 1,5r$.

Теперь опустим перпендикуляр O_1G на OT . Тогда $OG = 3 - r$, $O_1G = T_1T = 4,5 - 1,5r$, получаем уравнение:

$$\begin{aligned} (4,5 - 1,5r)^2 + (3 - r)^2 &= (r + 3)^2 \Leftrightarrow (9 - 3r)^2 + (6 - 2r)^2 = (2r + 6)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3r^2 - 34r + 27 &= 0 \Leftrightarrow r = \frac{17 \pm \sqrt{208}}{3}. (4,5 - 1,5r)^2 + (3 - r)^2 = (r + 3)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (9 - 3r)^2 + (6 - 2r)^2 = (2r + 6)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3r^2 - 34r + 27 &= 0 \Leftrightarrow r = \frac{17 \pm \sqrt{208}}{3}. \end{aligned}$$

Из двух корней подходит только меньший, поскольку $r < 3$.

Ответ: $r = \frac{17 - \sqrt{208}}{3}$.

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет	3
С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения. ИЛИ в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений	2

В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений. ИЛИ в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решение. Заметим, что если число x_0 является корнем уравнения, то и число $-x_0$ тоже является корнем этого уравнения. Значит, достаточно рассмотреть только $x \geq 0$, при этом условии уравнение примет вид

$$\sin(\operatorname{arctg} x) + a \cos \frac{\operatorname{arctg} x}{2} = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Пусть $y = \operatorname{arctg} x$, тогда $x = \operatorname{tg} y$, где $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$. Получаем

$$\begin{aligned} \sin y + a \cos \frac{y}{2} &= \frac{a \operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} \Leftrightarrow \sin y + a \cos \frac{y}{2} = \frac{a \sin y \cdot |\cos y|}{\cos y \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}} \Leftrightarrow \sin y + a \cos \frac{y}{2} = a \sin y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} - 2a \sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2} + a \cdot \cos \frac{y}{2} = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{y}{2} - 2a \sin \frac{y}{2} + a = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{y}{2} = \frac{a}{2(a-1)}. \end{aligned}$$

Полученное тригонометрическое уравнение имеет решение на $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ при

$$\begin{aligned} \sin 0 \leq \frac{a}{2(a-1)} < \sin \frac{\pi}{4} &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{a}{2(a-1)} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2(a-1)} \geq 0, \\ \frac{a}{a-1} < \sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a > 1, \\ a < 1, \\ a > 2 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a > 2 + \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы одно решение при $a \leq 0$ и $a > 2 + \sqrt{2}$.

Ответ: $(-\infty; 0] \cup (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в) и обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а) и б) ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в)	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4

Решение. Поскольку $A+2+B-1=A+B+1$, с каждым ходом сумма чисел будет возрастать на 1.

а) После 100 ходов сумма станет $4+5+100 < 200$, значит, второе число пары не будет натуральным. Это запрещено.

б) Понадобится $300 - (4+5) = 291$ ход. Такая ситуация возможна, если каждый раз на роль уменьшаемого выбирать большее из двух чисел, — если оно равно 1, то оба числа должны быть единицами, что невозможно, поскольку сумма чисел постоянно растет и в самом начале равна $4+5 > 1+1$.

в) Заметим, что разность между числами за один ход всегда меняется на 3. Была равна $A-B$, а станет равна

$$(A+2)-(B-1)=(A-B)+3 \quad \text{или} \quad (A-1)-(B+2)=(A-B)-3.$$

Изначально эта разность равна $5-4=1$ и не кратна трем, поэтому она никогда не станет равна нулю. Значит, сделать числа 200 и 200 не получится.

Поэтому сумма двух этих чисел будет не больше $199+200=399$ и будет сделано не более $399-9=390$ ходов. Сделать столько ходов можно например так — 195 раз повторить пару ходов

$$(x, x+1) \mapsto (x+2, x) \mapsto (x+1, x+2),$$

увеличивающую оба числа на 1, если наибольшее не превосходило 199.

Ответ: а) нет; б) 291; в) 390.
