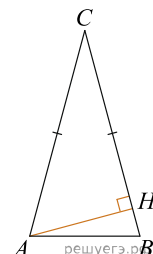


Вариант 220

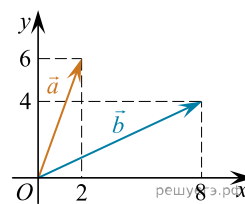
№ 1.

В остроугольном треугольнике ABC известно, что $AC = BC = 6$, высота AH равна 3. Найдите угол C . Ответ дайте в градусах.



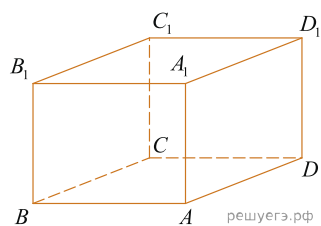
№ 2.

Найдите квадрат длины вектора $\vec{a} + \vec{b}$.



№ 3.

Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=3$. Дайте ответ в градусах.



N_o 4.

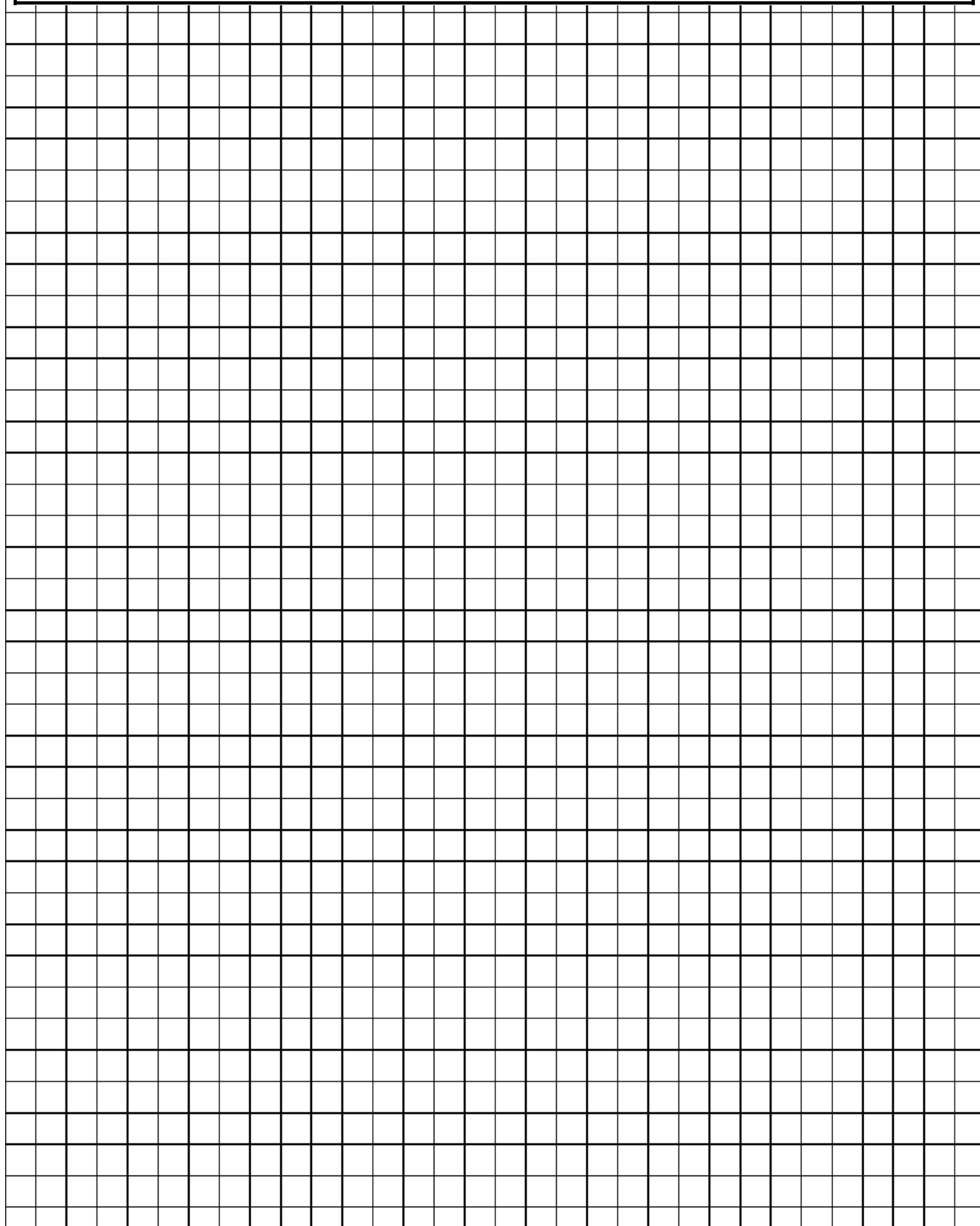
Фабрика выпускает сумки. В среднем на 190 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

№ 5.

В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью $0,8$ погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня Зима, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что зима в Волшебной стране будет отличная погода.

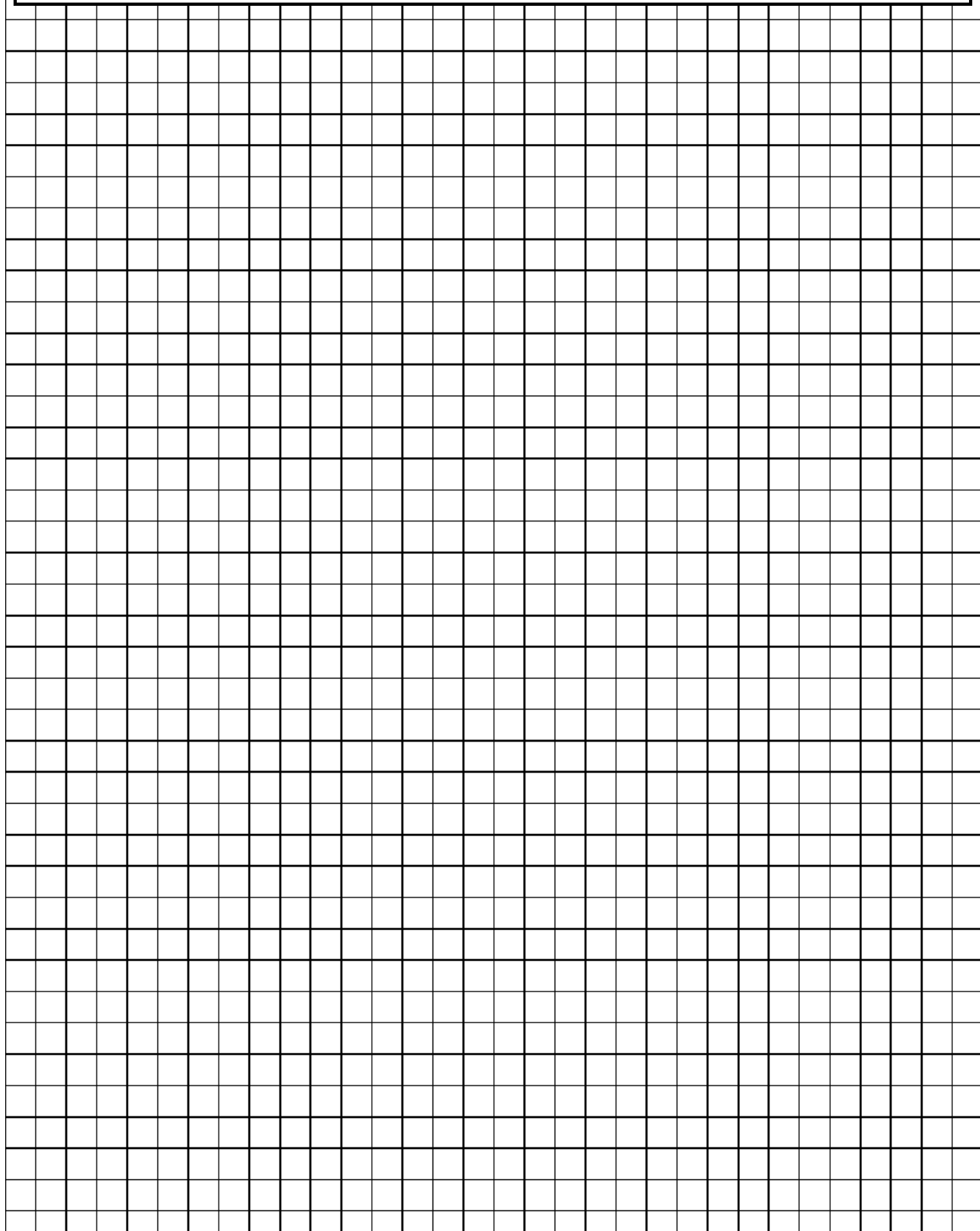
№ 6.

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-8} = \frac{1}{9}$.



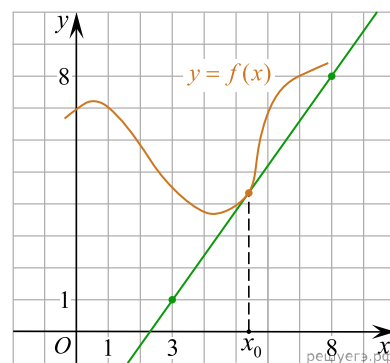
№ 7.

Найдите значение выражения $\frac{12}{\sin^2 27^\circ + \cos^2 207^\circ}$.



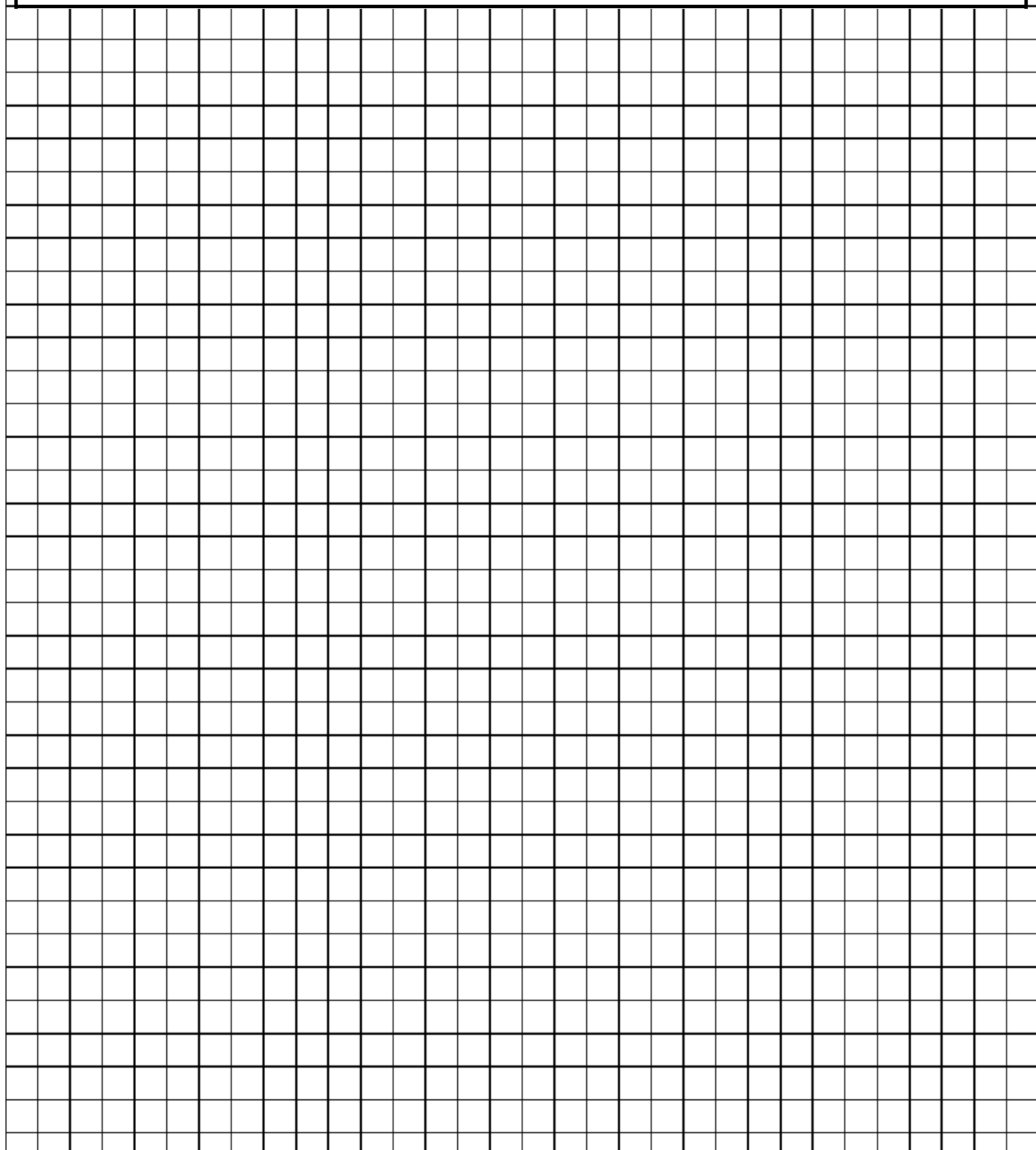
№ 8.

На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



№ 9.

При сближении источника и приёмника звуковых сигналов движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 160 Гц?

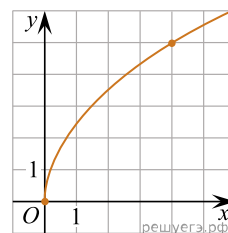


№ 10.

Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

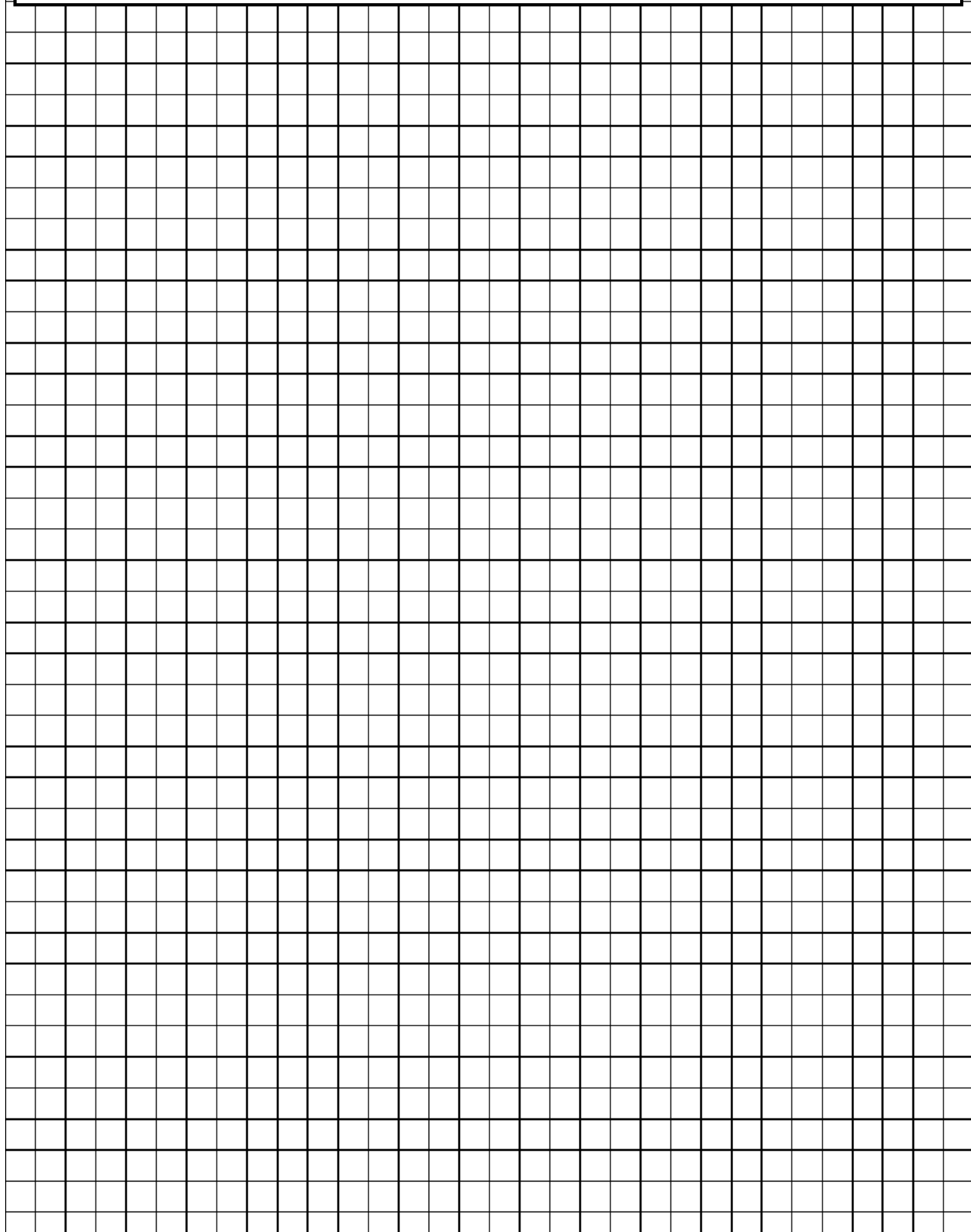
№ 11.

На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 3,5$.



№ 12.

Найдите наименьшее значение функции $y = 7^{x^2 - 2x + 3}$.



№ 13.

а) Решите уравнение $8\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}+x\right)-2\sqrt{3}\cos 2x=5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

№ 14.

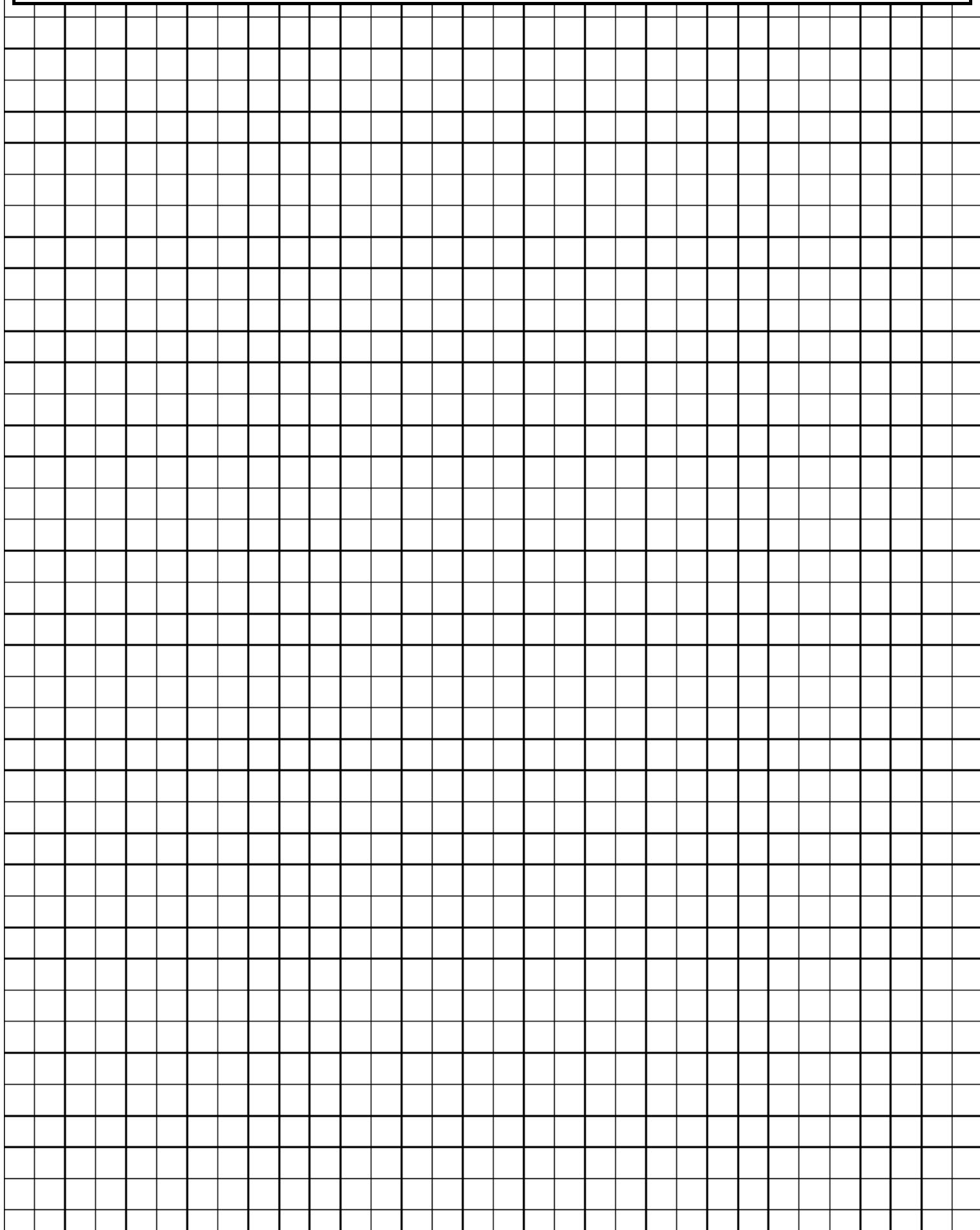
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K — середина ребра A_1B_1 . Плоскость α проходит через точки A , K и C .

а) Докажите, что сечением призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения, если все ребра призмы равны 6.

№ 15.

Решите неравенство $\frac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-3x-4} \leq 0$.



№ 16.

Сергей владеет двумя цехами, расположенными в разных районах города. В цехах производятся абсолютно одинаковая продукция, но в первом цехе используется более современное оборудование. В результате если рабочие второго цеха трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц продукции. Если же рабочие первого цеха трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $4t$ единиц продукции. В обоих цехах за каждый час работы рабочему платят 450 рублей. Сергей готов платить рабочим 1640250 рублей в неделю. На какое максимальное число единиц продукции он может рассчитывать?

№ 17.

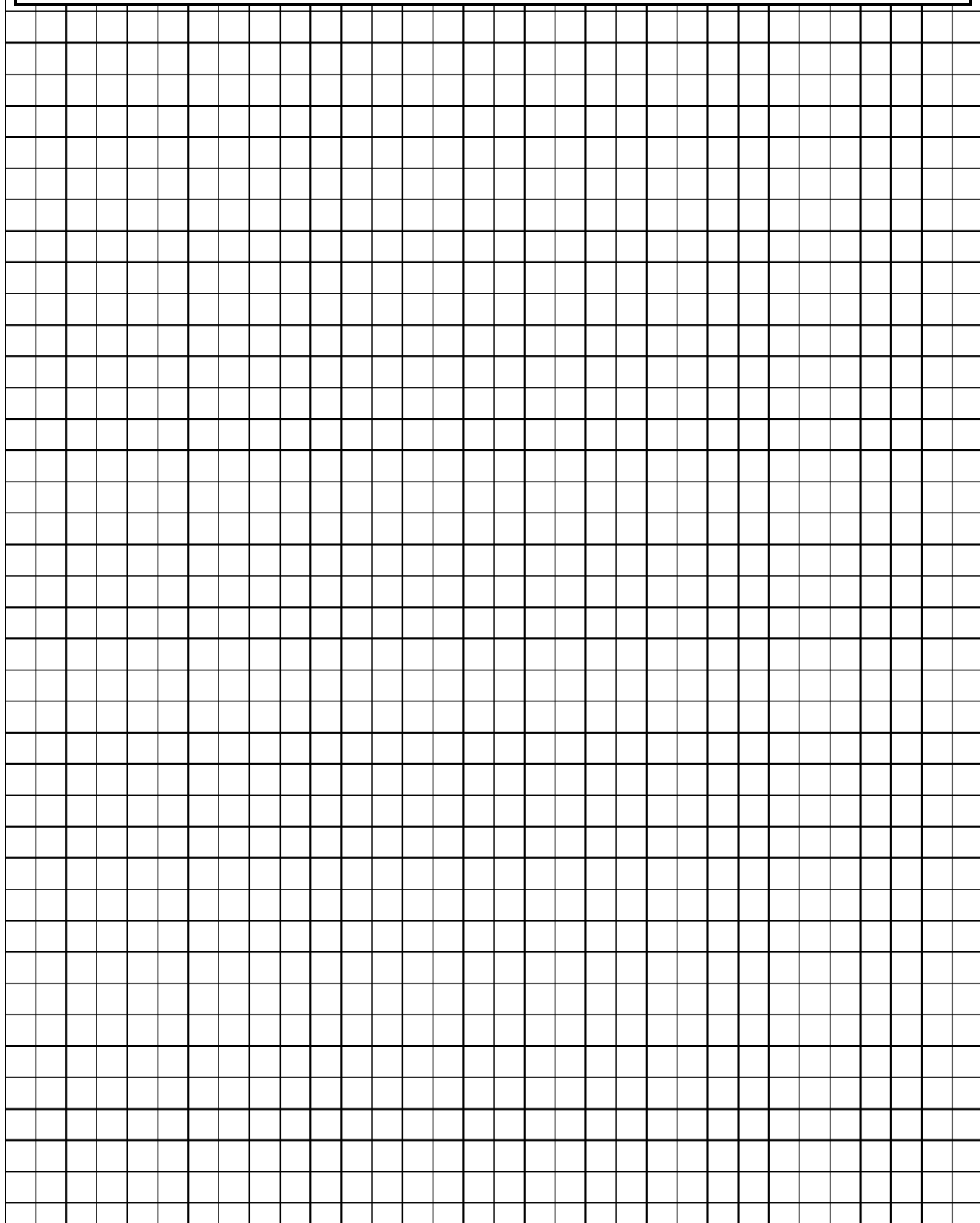
Прямая, параллельная гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , пересекает катет AC в точке D , катет BC — в точке E , причем $DE=2$ и $BE=1$. На гипотенузе взята точка F так, что $BF=1$, величина угла FCB равна 30° .

а) Докажите, что треугольник BFE равносторонний.

б) Найдите площадь треугольника ABC .

№ 18.

Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 - 4|x| - ax + a$ на отрезке $[-1; 3]$ не меньше, чем -5 .



№ 19.

Трое друзей играли в шашки. Один из них сыграл 25 игр, а другой— 17 игр. Мог ли третий участник сыграть

а) 34;

б) 35;

в) 56 игр?

Ответы

Номер	Задание	Ответ
1	27796	30
2	27731	200
3	245361	45
4	283639	0.96
5	320206	0.392
6	26652	10
7	26774	12
8	541372	1.4
9	27980	390
10	99583	18
11	509118	1.96
12	507908	49

№ 13.

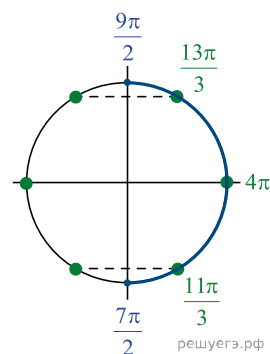
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
<i>Максимальный балл</i>	2

Решение. а) Запишем уравнение в виде $4\sin^3 x - 3\sin x = 0$.

Значит, или $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $\sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ от-

куда $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ или $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{11\pi}{3}, 4\pi, \frac{13\pi}{3}$.



Ответ: а) $\left\{ \pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{11\pi}{3}; 4\pi; \frac{13\pi}{3}$.

Примечание.

Внимательный читатель, конечно, узнал формулу синуса тройного угла:

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

№ 14.

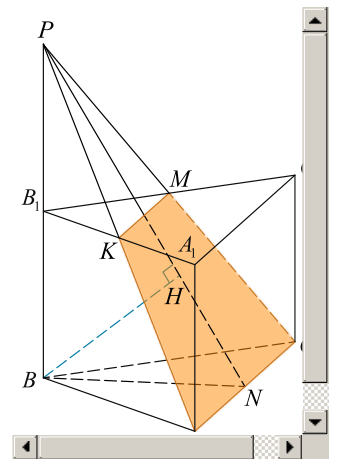
Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Плоскость α пересекает нижнее основание призмы по прямой AC . Вследствие параллельности плоскостей оснований призмы заключаем, что плоскость α пересекает верхнее основание по прямой, параллельной прямой AC . Проведем через точку K прямую KM параллельно прямой AC . Прямые AC и A_1C_1 параллельны, поэтому параллельны прямые A_1C_1 и KM . Следовательно, по теореме Фалеса отрезок KM — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$. Треугольники AA_1K и CC_1M равны по двум катетам, поэтому $AK = CM$. Таким образом, четырехугольник $AKMC$ — равнобедренная трапеция.

б) Продлим прямые BB_1 , AK и CM до пересечения в точке P (см. рис.). Проведем высоту BH в треугольнике ABC , тогда прямая BH перпендикулярна прямой AC по построению, прямая PB перпендикулярна плоскости основания правильной призмы, а потому и прямой AC , лежащей в этой плоскости. Следовательно, прямая AC перпендикулярна плоскости PNB . Построим перпендикуляр BH в треугольнике PNB . Прямая BH перпендикулярна прямой PN по построению и прямой AC по теореме о трех перпендикулярах, то есть прямая BH перпендикулярна плоскости α , отрезок BH — искомое расстояние.

Треугольники CPB и MPB_1 подобны по двум углам, откуда $\frac{PB_1}{PB} = \frac{MB_1}{CB} = \frac{1}{2}$, то есть $PB = 2BB_1 = 12$. В равностороннем треугольнике ABC высота равна $BN = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$. Длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, равна произведению длин катетов, деленному на длину гипотенузы, поэтому в треугольнике PNB получаем:

$$BH = \frac{BN \cdot PB}{PN} = \frac{BN \cdot PB}{\sqrt{BN^2 + PB^2}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 12}{\sqrt{27 + 144}} = \frac{36\sqrt{3}}{\sqrt{171}} = \frac{36}{\sqrt{57}} = \frac{36\sqrt{57}}{57} = \frac{12\sqrt{57}}{19}, \quad BH = \frac{BN \cdot PB}{PN} = \frac{BN \cdot PB}{\sqrt{BN^2 + PB^2}} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 12}{\sqrt{27 + 144}} = \frac{36\sqrt{3}}{\sqrt{171}} = \frac{36}{\sqrt{57}} = \frac{36\sqrt{57}}{57} = \frac{12\sqrt{57}}{19}.$$



Ответ: б) $\frac{12\sqrt{57}}{19}$.

№ 15.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

Решение. Выполним равносильные преобразования

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-3x-4} \leq 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-2x-(x^2-5x+6)}{x^2-3x-4} \leq 0, \\ x^2-2x \geq 0, \\ x^2-5x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-6}{(x+1)(x-4)} \leq 0, \\ x(x-2) \geq 0, \\ (x-3)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x = 2, \\ 3 \leq x < 4. \end{cases} \frac{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2-5x+6}}{x^2-3x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-2x-(x^2-5x+6)}{x^2-3x-4} \leq 0, \\ x^2-2x \geq 0, \\ x^2-5x+6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x-6}{(x+1)(x-4)} \leq 0, \\ x(x-2) \geq 0, \\ (x-3)(x-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x = 2, \\ 3 \leq x < 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \{2\} \cup [3; 4)$.

№ 16.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Решение. Всего в неделю Сергей готов оплачивать $\frac{1640250}{450} = 3645$ часов работы. Пусть в первом цехе рабочие суммарно будут трудиться x^2 часов в неделю, при этом они будут производить $4x$ единиц продукции. Тогда во втором цехе рабочие суммарно смогут трудиться $3645 - x^2$ часов в неделю, при этом они будут

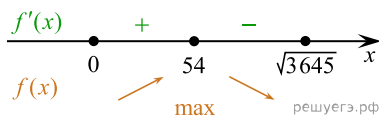
производить $2\sqrt{3645-x^2}$ единиц продукции. Значит, всего за неделю будет произведено $4x+2\sqrt{3645-x^2}$ единиц продукции.

Рассмотрим функцию $f(x)=4x+2\sqrt{3645-x^2}$, где $0\leq x\leq \sqrt{3645}$, и найдём её наибольшее значение. Возьмем производную:

$$f'(x)=4+\frac{2\cdot(-2x)}{2\sqrt{3645-x^2}}=4-\frac{2x}{\sqrt{3645-x^2}}.$$

Приравняв производную к нулю, найдём стационарные точки и исследуем функцию на монотонность:

$$\begin{aligned} 4-\frac{2x}{\sqrt{3645-x^2}}=0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3645-x^2}=x, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 5x^2=4\cdot 3645 &\Leftrightarrow x^2=4\cdot 729 \Leftrightarrow x=2\cdot 27 \Leftrightarrow x=54. \quad 4-\frac{2x}{\sqrt{3645-x^2}}=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3645-x^2}=x, \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 5x^2=4\cdot 3645 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2=4\cdot 729 \Leftrightarrow x=2\cdot 27 \Leftrightarrow x=54. \end{aligned}$$



В точке $x=54$ функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения. Найдём его:

$$\begin{aligned} f(54) &= 4\cdot 54 + 2\sqrt{3645-54^2} = 4\cdot 54 + 2\sqrt{5\cdot 729-4\cdot 729} = 8\cdot 27 + 2\cdot 27 = 270. \quad f(54) = 4\cdot 54 + 2\sqrt{3645-54^2} = \\ &= 4\cdot 54 + 2\sqrt{5\cdot 729-4\cdot 729} = 8\cdot 27 + 2\cdot 27 = 270. \quad f(54) = 4\cdot 54 + 2\sqrt{3645-54^2} = \\ &= 4\cdot 54 + 2\sqrt{5\cdot 729-4\cdot 729} = \\ &= 8\cdot 27 + 2\cdot 27 = 270. \end{aligned}$$

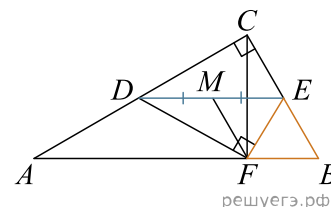
Таким образом, максимальное число единиц продукции, на которое Сергей может рассчитывать, равно 270.

Ответ: 270.

№ 17.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> .	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> и использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

Решение. а) Пусть точка M — середина отрезка DE . Тогда отрезки ME и FB равны и параллельны, следовательно, четырехугольник $MEBF$ — параллелограмм, поэтому $MF = EB = 1$, откуда $FM = \frac{1}{2}DE$, а значит, $\angle DFE = 90^\circ$. Следовательно, четырехугольник $DCEF$ вписан в окружность, а тогда $\angle DEF = \angle DCF = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Прямые DE и AB параллельны, поэтому $\angle EFB = \angle DEF$. Треугольник BFE равнобедренный с углом 60° , следовательно, он равносторонний. Что требовалось доказать.



б) Заметим, что

$$\angle CFB = 180^\circ - \angle FCB - \angle CBF = 90^\circ,$$

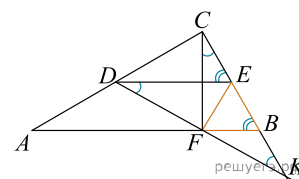
откуда $CF = BF \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ и $AF = CF \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 3$, следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (3 + 1) = 2\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

Приведем решение Валерия Григорьева.

а) Продолжим отрезки DF и BC до пересечения в точке K . В треугольнике DEK отрезок BF — средняя линия, так как он параллелен основанию DE и равен его половине. Тогда $EK = 2$, значит, треугольник DEK — равнобедренный, а точка F — середина DK , откуда $DF = FK$. Следовательно, CF — медиана в прямоугольном треугольнике CDK , и потому $CF = FK$.



Таким образом, треугольник CFK — равнобедренный, углы при его основании равны 30° . В треугольнике DEK имеем: $\angle EDK = \angle EKD = 30^\circ$ и $\angle DEK = 120^\circ$, а смежный с ним угол CEK равен 60° . Это угол, в свою очередь, является соответственным с углом ABC при параллельных DE и AB и секущей BE . Таким образом, треугольник EKB — равнобедренный с углом 60° , то есть равносторонний.

б) В прямоугольном треугольнике CDE имеем: $\angle CDE = 30^\circ$ и $CE = \frac{1}{2}DE = 1$, откуда $BC = CE + EB = 1 + 1 = 2$. Гипотенуза AB вдвое больше средней линии DE , то есть $AB = 4$. По теореме Пифагора в треугольнике ABC получаем $AC = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$. Площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}.$$

№ 18.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений x , отличающееся от искомого конечным числом точек.	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений x .	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений x . ИЛИ Установлено, что исходное уравнение при всех значениях x имеет единственное решение.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

Решение. Потребовать, чтобы наименьшее значение функции было не меньше

чем -5 это все равно что потребовать, чтобы все ее значения были не меньше чем -5 . То есть неравенство $x^2 - 4|x| - ax + a \geq -5$ должно выполняться на всем промежутке $[-1; 3]$. То есть

$$x^2 + (4-a)x + a + 5 \geq 0 \text{ при } x \in [-1; 0] \text{ и } x^2 - (4+a)x + a + 5 \geq 0 \text{ при } x \in [0; 3].$$

$$x^2 + (4-a)x + a + 5 \geq 0 \text{ при } x \in [-1; 0] \text{ и } x^2 - (4+a)x + a + 5 \geq 0 \text{ при } x \in [0; 3].$$

Теперь заметим, что и наоборот— достаточно чтобы эти неравенства выполнялись в нескольких точках, если только одна из них (можно не выяснять какая) будет точкой с наименьшим значением. Поскольку квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом на любом отрезке принимает наименьшее значение либо в абсциссе вершины параболы— его графика (если эта точка лежит на отрезке) либо в одном из концов отрезка (если не лежит), то нужно проверить следующие неравенства:

$$1 - (4-a) + a + 5 \geq 0 \quad (\text{верно при } a \geq -1),$$

$$a + 5 \geq 0 \quad (\text{верно при } a \geq -5),$$

$$9 - 3(4+a) + a + 5 \geq 0 \quad (\text{верно при } a \leq 1).$$

$-\frac{(a-4)^2}{4} + a + 5 \geq 0$ при $\frac{a-4}{2} \in [-1; 0]$, то есть при $a \in [2; 4]$ (нас не интересует, поскольку уже установлено, что $a \in [-1; 1]$)

$-\frac{(a+4)^2}{4} + a + 5 \geq 0$ при $\frac{a+4}{2} \in [0; 3]$, то есть при $a \in [-4; 2]$ (то есть это обязательно надо проверить, при $a \in [-1; 1]$ указанная точка точно лежит на интересующем нас отрезке).

$$-a^2 - 8a - 16 + 4a + 20 \geq 0,$$

$$-a^2 - 4a + 4 \geq 0,$$

$$a^2 + 4a + 4 \leq 8,$$

$$(a+2)^2 \leq 8,$$

$$a \in [-2 - \sqrt{8}; -2 + \sqrt{8}].$$

Итак, совмещая все ограничения, получаем $a \in [-1; -2 + \sqrt{8}]$.

Ответ: $a \in [-1; -2 + \sqrt{8}]$.

№ 19.

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение в п. а; — пример в п. б; — искомая оценка в п. в; — пример в п. в, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

Решение. а) Да, мог. Например, если первый с третьим сыграли 21 игру, второй с третьим — 13 игр, а первый со вторым — 4 игры.

б) Нет, не мог. Действительно, в таком случае общее число сыгранных партий было бы равно $(25+17+35)/2 = 38,5$ игр — не целое число.

в) Нет, не мог. Пусть такое возможно, тогда третий игрок сыграл больше партий, чем первый и второй вместе взятые ($25+17 < 56$). Но других соперников у третьего не могло быть, поэтому получаем противоречие.
