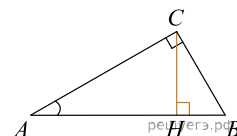


# Вариант 221

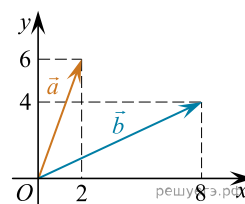
№ 1.

В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  равен  $90^\circ$ ,  $CH$  — высота,  $BC = 3$ ,  $\sin A = \frac{1}{6}$ . Найдите  $AH$ .



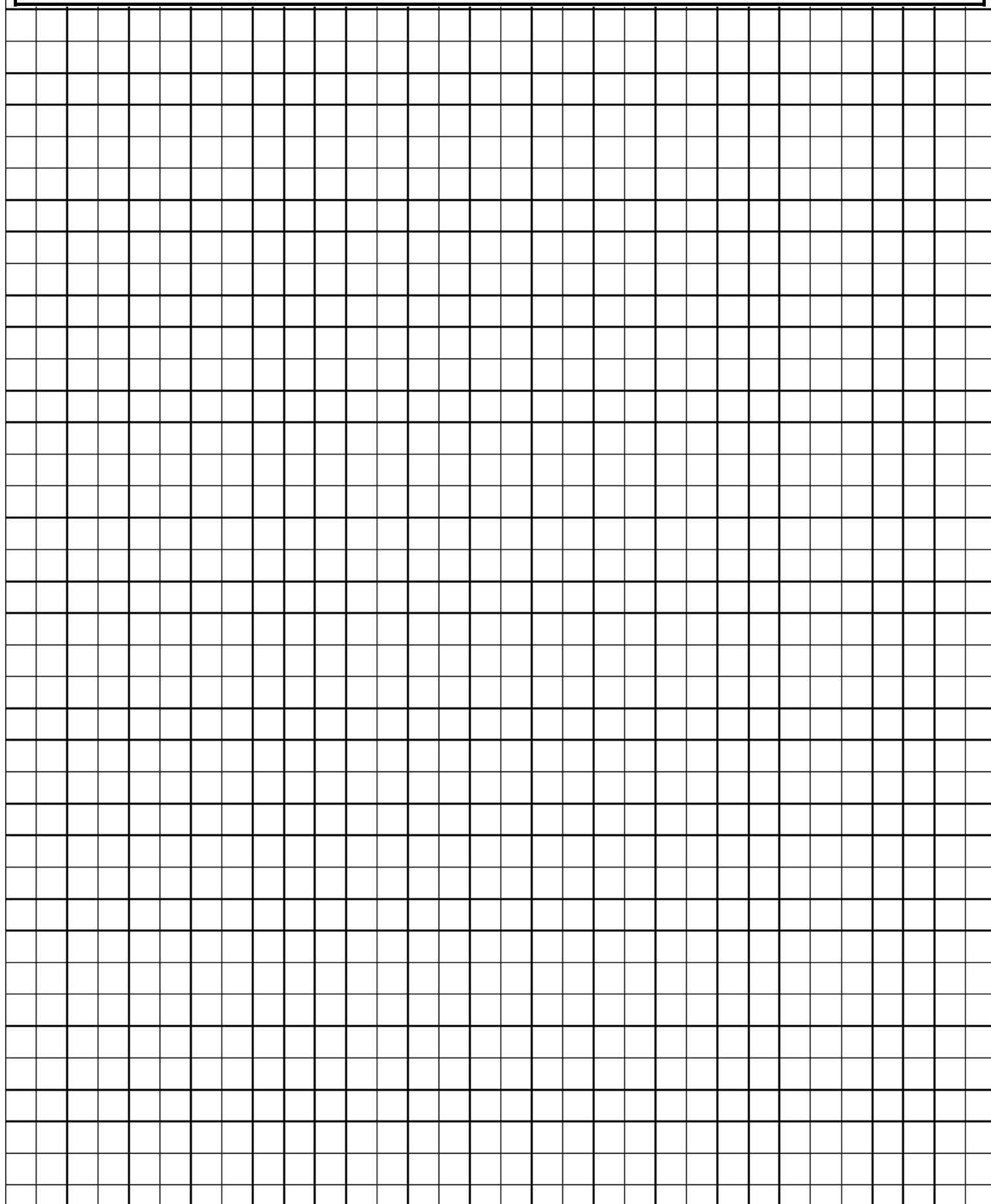
№ 2.

Найдите сумму координат вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ .



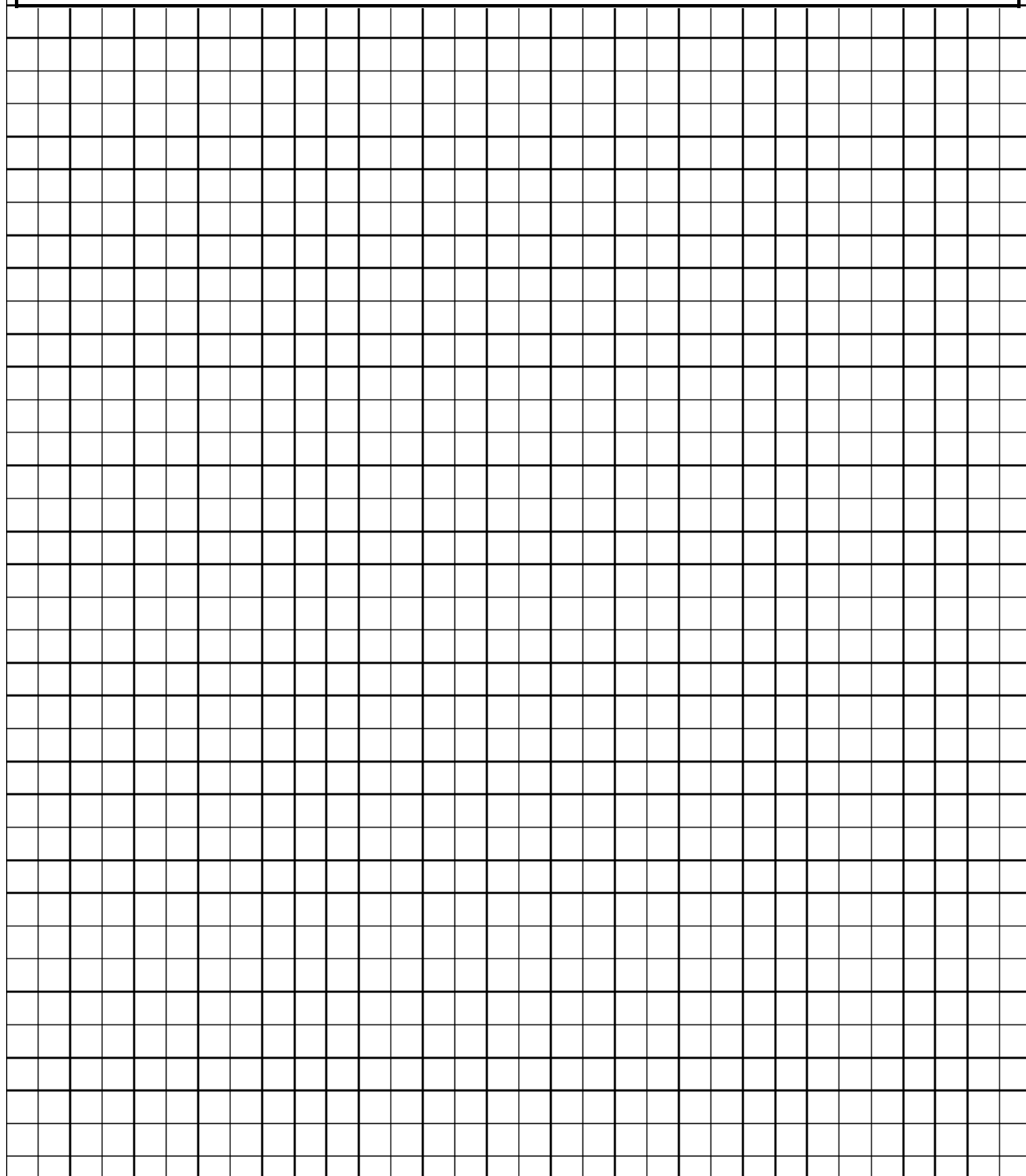
№ 3.

В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  медианы основания пересекаются в точке  $M$ . Площадь треугольника  $ABC$  равна 3, объем пирамиды равен 1. Найдите длину отрезка  $MS$ .



№ 4.

На борту самолёта 12 кресел расположены рядом с запасными выходами и 18— за перегородками, разделяющими салоны. Все эти места удобны для пассажира высокого роста. Остальные места неудобны. Пассажир В. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру В. достанется удобное место, если всего в самолёте 300 мест.

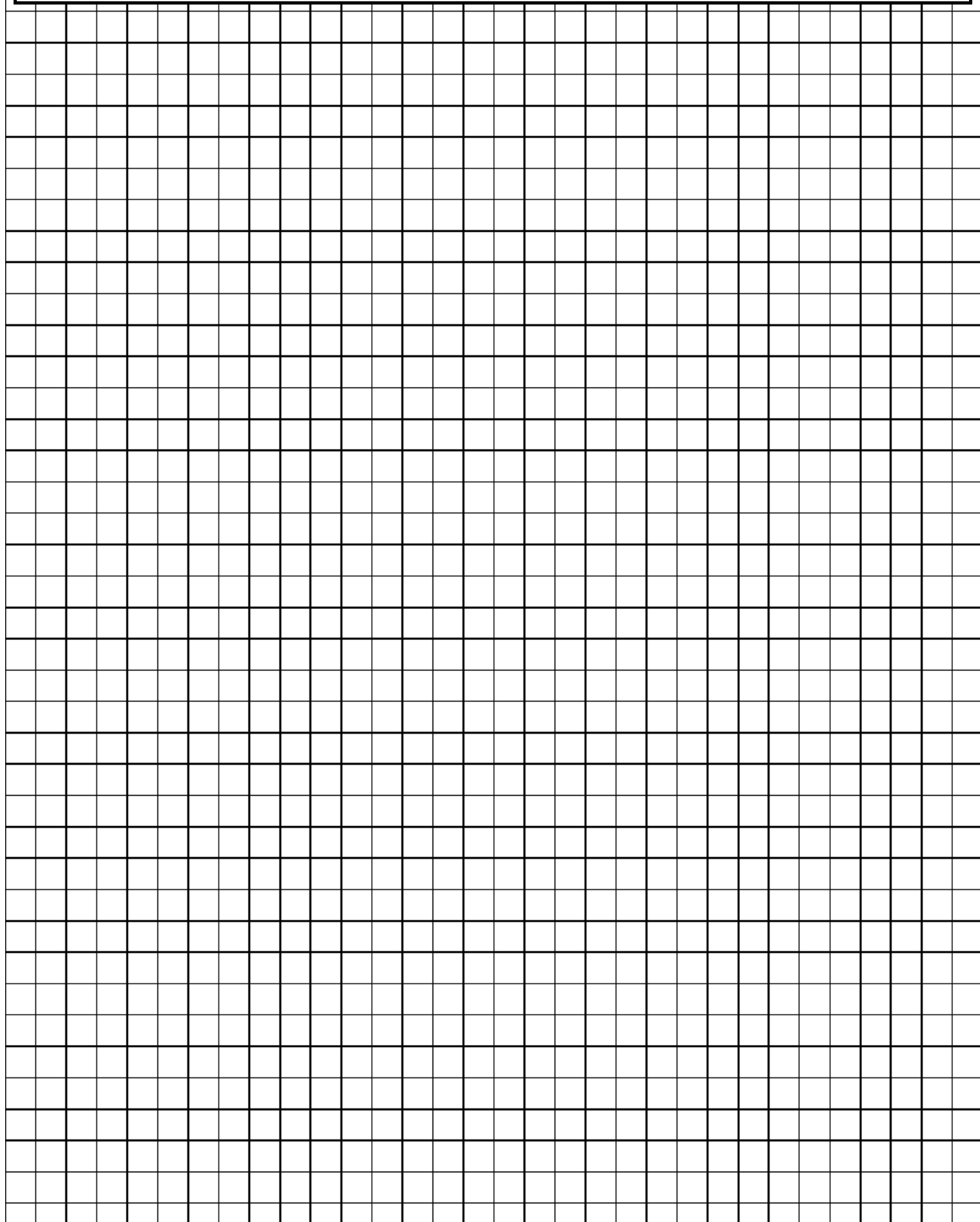


**N<sub>o</sub> 5.**

Игральный кубик бросали до тех пор, пока сумма всех выпавших очков не превысила число 3. Какова вероятность того, что для этого потребовалось ровно два броска? Ответ округлите до тысячных.

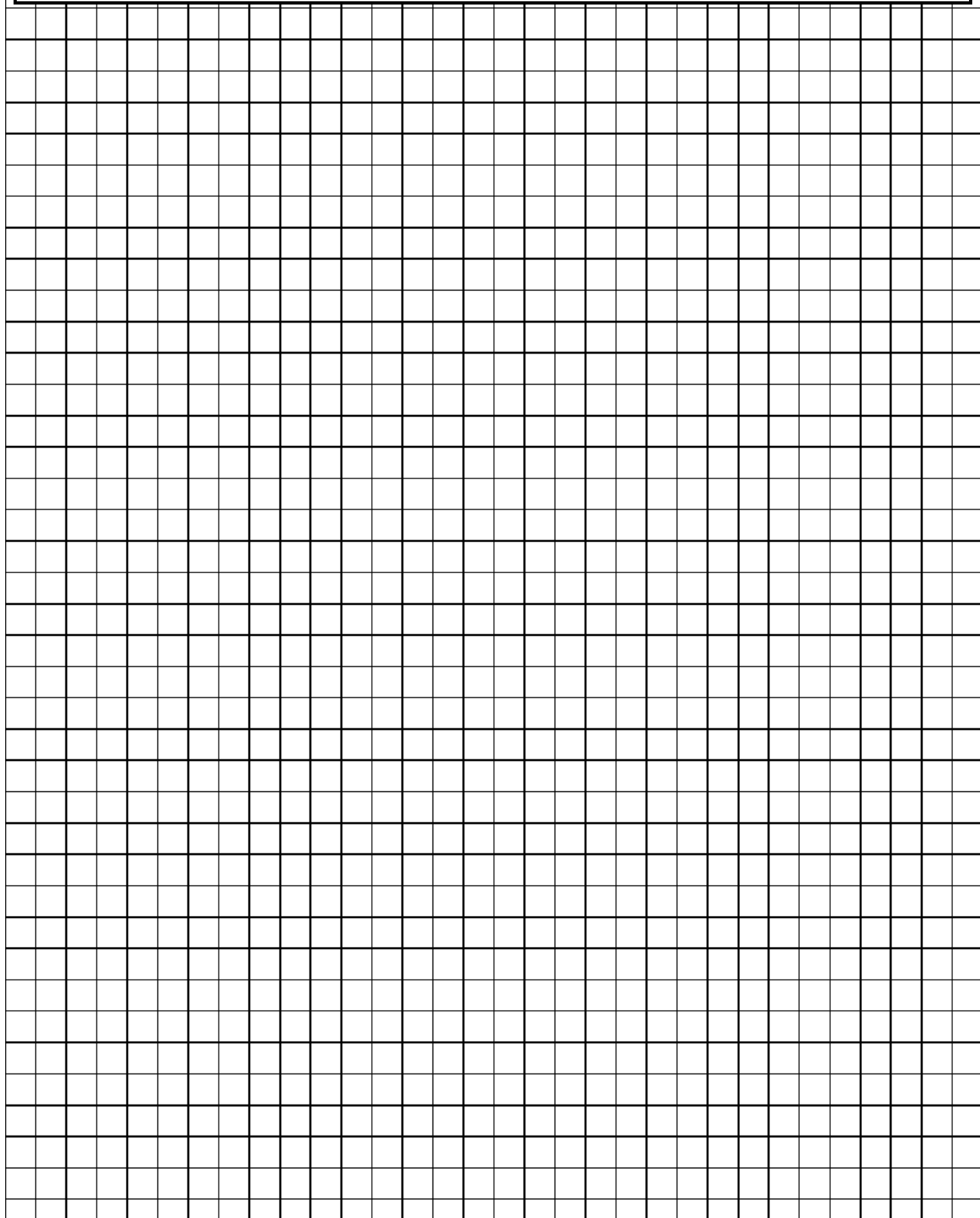
№ 6.

Найдите корень уравнения  $\frac{x+89}{x-7} = \frac{-5}{x-7}$ .



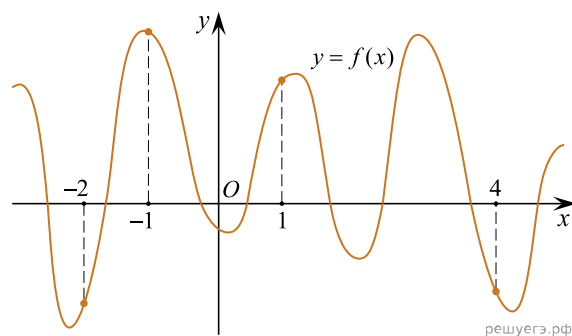
№ 7.

Найдите  $\frac{g(2-x)}{g(2+x)}$ , если  $g(x) = \sqrt[3]{x(4-x)}$  при  $|x| \neq 2$ .



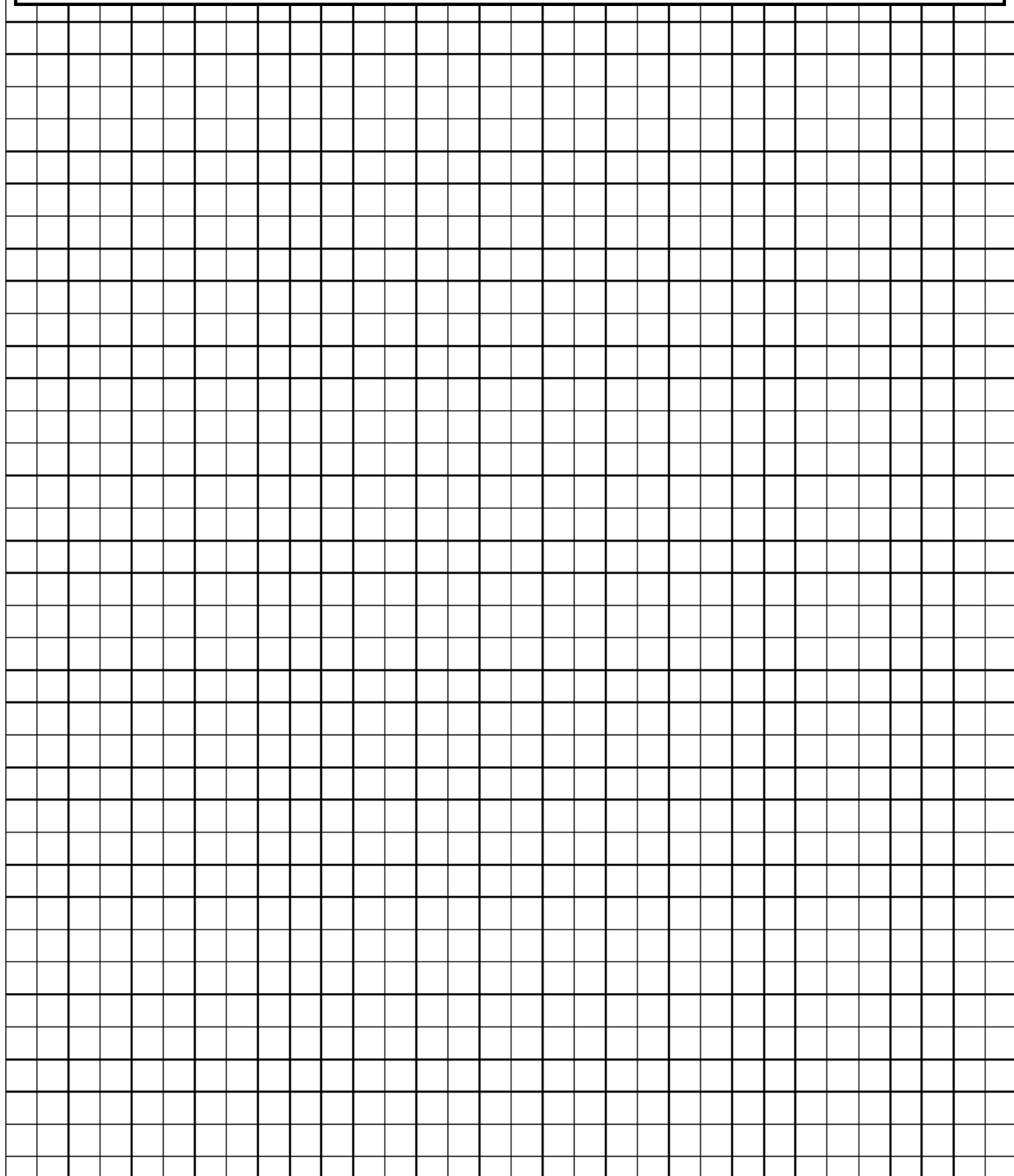
№ 8.

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $-2$ ,  $-1$ ,  $1$ ,  $4$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



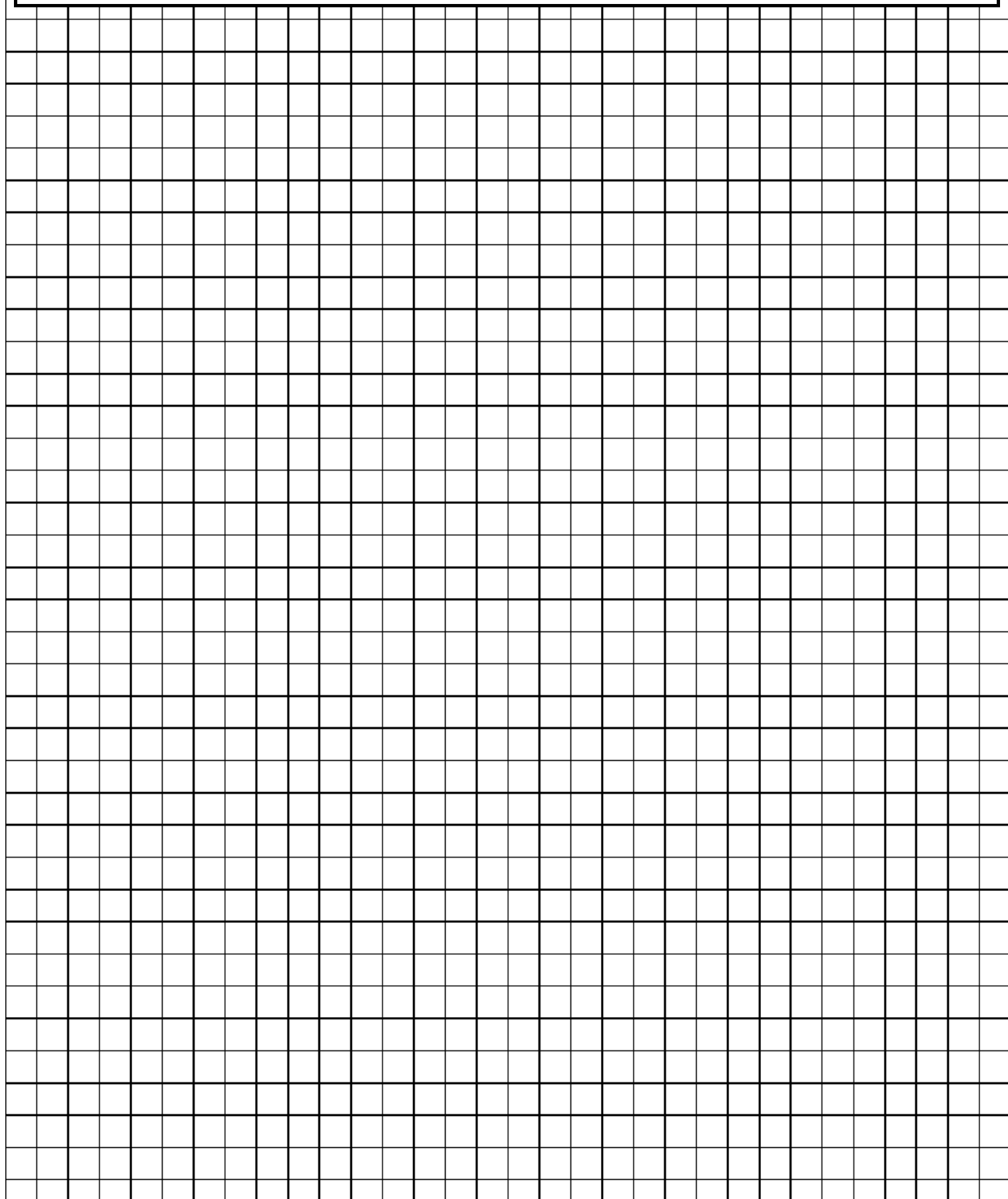
№ 9.

Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением  $a=5000$  км/ч<sup>2</sup>. Скорость вычисляется по формуле  $v = \sqrt{2la}$ , где  $l$  — пройденный автомобилем путь в км. Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 100 км/ч.



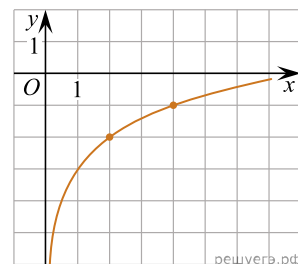
№ 10.

В 2008 году в городском квартале проживало 40000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?



№ 11.

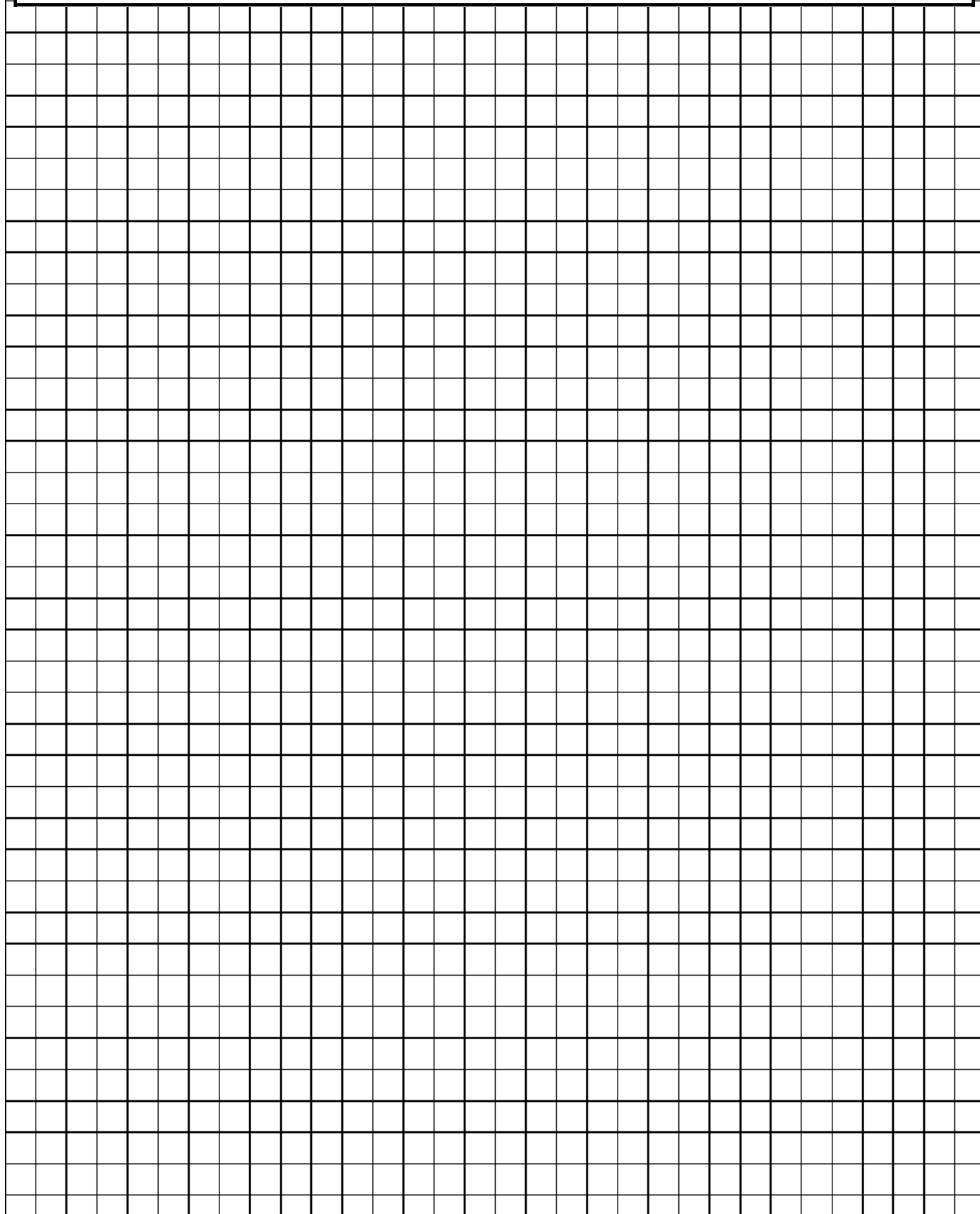
На рисунке изображён график функции  $f(x) = b + \log_a x$ .  
Найдите  $f(32)$ .



реши.рф

№ 12.

Найдите наибольшее значение функции  $y = \ln(x+5)^5 - 5x$  на отрезке  $[-4,5; 0]$ .



№ 13.

а) Решите уравнение  $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right]$ .

№ 14.

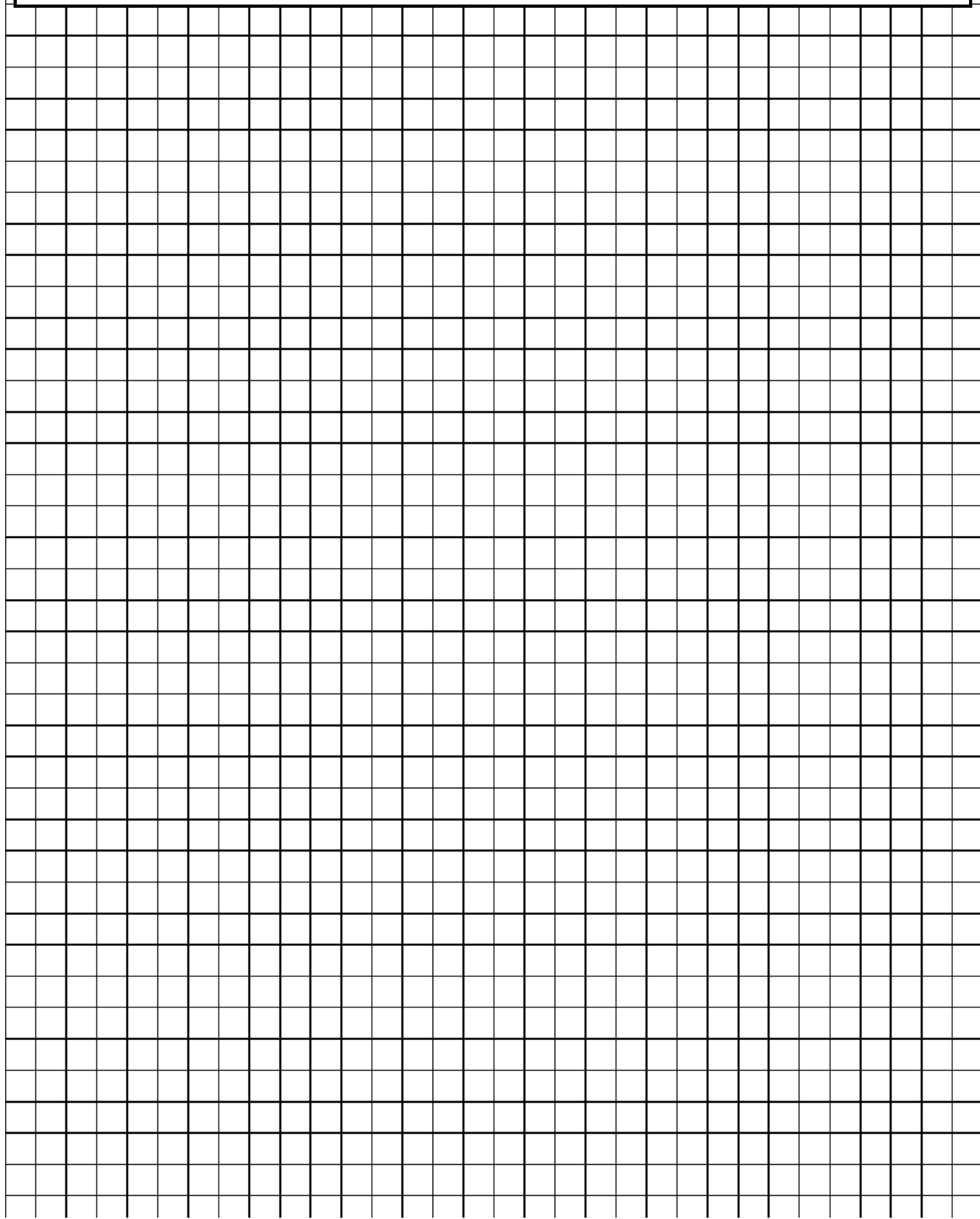
Точка  $O$  — центр грани  $A_1B_1C_1D_1$  прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ . Сечения параллелепипеда плоскостями  $AOB$  и  $BOC$  являются прямоугольниками, стороны  $AB$  и  $BC$  этих сечений в 3 раза меньше соответственных больших сторон сечений.

а) Докажите, что  $ABCD$  — квадрат.

б) Найдите угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $BOC$ .

№ 15.

Решите неравенство:  $\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3\right)^{x^2-x-7} > \frac{4}{x^2-6x+12}$ .



№ 16.

Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент, свой для каждого банка. В начале года Степан положил 60% некоторой суммы денег в первый банк, а оставшуюся часть суммы во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590000руб., а к концу следующего года 701000руб. Если бы Степан первоначально положил 60% своей суммы во второй банк, а оставшуюся часть в первый, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 610000руб. Какова была бы сумма вкладов в этом случае к концу второго года?

№ 17.

В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с углом  $120^\circ$  при вершине  $A$  проведена биссектриса  $BD$ . В треугольник  $ABC$  вписан прямоугольник  $DEFH$  так, что сторона  $FH$  лежит на отрезке  $BC$ , а вершина  $E$  — на отрезке  $AB$ .

а) Докажите, что  $FH = 2DH$ .

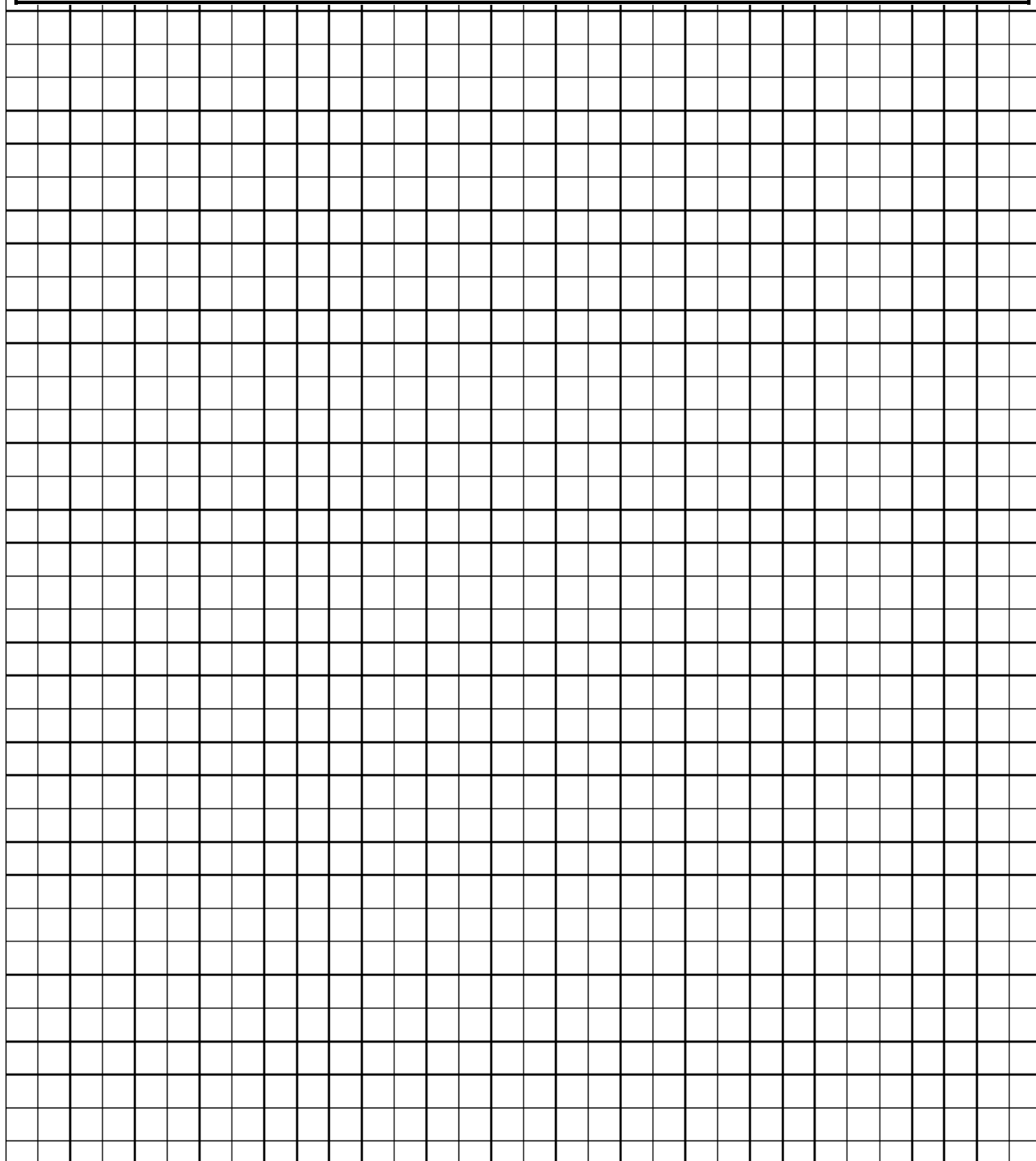
б) Найдите площадь прямоугольника  $DEFH$ , если  $AB = 4$ .

№ 18.

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$\log_{\frac{1}{a}}^2(ax) - \log_a x \leq 7$$

имеет решения, ни одно из которых не принадлежит отрезку  $[2; 8]$ .



№ 19.

Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100руб., на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10руб., из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110руб., средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81руб., а средняя цена книг без бирки — 226руб. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90руб., а средняя цена книг без бирки — 210руб. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

# Ответы

| Номер | Задание                | Ответ |
|-------|------------------------|-------|
| 1     | <a href="#">27268</a>  | 17,5  |
| 2     | <a href="#">27730</a>  | 20    |
| 3     | <a href="#">284354</a> | 1     |
| 4     | <a href="#">320190</a> | 0,1   |
| 5     | <a href="#">508797</a> | 0,417 |
| 6     | <a href="#">689090</a> | -94   |
| 7     | <a href="#">26839</a>  | 1     |
| 8     | <a href="#">317544</a> | 4     |
| 9     | <a href="#">27987</a>  | 1     |
| 10    | <a href="#">99565</a>  | 47088 |
| 11    | <a href="#">509009</a> | 2     |
| 12    | <a href="#">26715</a>  | 20    |

№ 13.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.                                                                                                                                                   | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а),<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б). | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                  | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                              | 2     |

**Решение.** а) Заметим, что  $\cos x \neq 0$ , и преобразуем уравнение:

$$\begin{aligned}
 2\cos^2 x + 3\sin 2x &= 4 + 3\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 6\sin x \cos x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + 3(\cos^2 x - \sin^2 x) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \sin^2 x - 6\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

б) Отберем корни при помощи двойных неравенств. Для первой серии получаем:

$$5\pi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k \leq 6\pi \Leftrightarrow 4\frac{3}{4} \leq k \leq 5\frac{3}{4} \Leftrightarrow k = 5.$$

Найденному значению  $k$  соответствует корень  $\frac{21\pi}{4}$ . Рассмотрим вторую серию: заметим, что  $0 < \operatorname{arctg} 5 < \frac{\pi}{2}$ , тогда

$$5\pi \leq \operatorname{arctg} 5 + \pi n \leq 6\pi \Leftrightarrow 4\frac{1}{2} < n < 6 \Leftrightarrow n = 5.$$

Найденному значению  $n$  соответствует корень  $\operatorname{arctg} 5 + 5\pi$ .

Ответ: а)  $\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; \arctg 5 + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$ ; б)  $\frac{21\pi}{4}, \arctg 5 + 5\pi$ .

#### № 14.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                 | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                    | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                          | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а),<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br><br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                      | 0     |
| Максимальный Балл                                                                                                                                                                                                                                                                      | 3     |

Решение. а) Плоскость  $BDC$  пересекает грань  $A_1B_1C_1D_1$  по прямой, параллельной прямой  $BC$ . Следовательно, эта плоскость проходит через середины ребер  $A_1B_1$  и  $C_1D_1$  — точки  $K$  и  $M$  соответственно. Аналогично плоскость  $AOB$  проходит через середины ребер  $B_1C_1$  и  $A_1D_1$  — точки  $L$  и  $N$ . Пусть  $AB = 2x$  и  $BC = 2y$ , тогда  $BL = 6x$  и  $BK = 6y$ ,  $KB_1 = x$  и  $LB_1 = y$ . Из равных по двум катетам прямоугольных треугольников  $BB_1K$  и  $BB_1L$  по теореме Пифагора получаем:

$$BB_1^2 = BK^2 - B_1K^2 = 36y^2 - x^2,$$

$$BB_1^2 = BL^2 - B_1L^2 = 36x^2 - y^2,$$

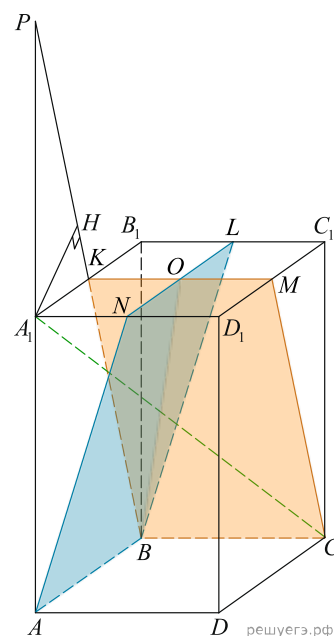
откуда

$$36y^2 - x^2 = 36x^2 - y^2 \Leftrightarrow 37y^2 = 37x^2 \Leftrightarrow x = y.$$

Это и означает требуемое.

б) Пусть прямые  $AA_1$  и  $BK$  пересекаются в точке  $F$ . Проведем в треугольнике  $A_1KF$  высоту  $A_1H$ . Проекция прямой  $A_1H$  на плоскость  $A_1B_1C_1$  есть прямая  $AB$ , а тогда по теореме о трех перпендикулярах прямые  $A_1H$  и  $KM$  перпендикулярны. Прямые  $A_1H$  и  $BK$  перпендикулярны по построению. Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая  $A_1H$  перпендикулярна плоскости  $BKD$ , и угол  $A_1CH$  — искомый.

Треугольники  $A_1FK$  и  $B_1BK$  равны по катету и острому углу. Из пункта а) следует, что  $A_1P = BB_1 = x\sqrt{35}$ . В прямоугольном треугольнике



решуегз.рф

длина высоты, проведенной к гипотенузе, равна произведению длин катетов, деленному на длину гипотенузы:

$$A_1H = \frac{A_1P \cdot A_1K}{PK} = \frac{x\sqrt{35} \cdot x}{6x} = \frac{\sqrt{35}x}{6}.$$

Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его измерений, откуда

$$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AD^2 + DC^2} = \sqrt{35x^2 + 4x^2 + 4x^2} = \sqrt{43x^2} = x\sqrt{43}.$$

Из прямоугольного треугольника  $A_1CH$  находим:

$$\sin \angle A_1CH = \frac{A_1H}{A_1C} = \frac{x\sqrt{35}}{6x\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{1505}}{258},$$

то есть  $\angle A_1CH = \arcsin \frac{\sqrt{1505}}{258}$ .

Ответ: б)  $\arcsin \frac{\sqrt{1505}}{258}$ .

Приведем решение Александра Турбанова (Липецк).

а) Пусть точки  $M, L, P, Q$  — середины ребер  $A_1B_1, D_1C_1, B_1C_1$  и  $A_1D_1$  соответственно. Прямая  $ML$  параллельна прямой  $CB$ , а прямая  $PQ$  — прямой  $AB$ . Пусть  $AB = 2x, AQ = 6x, BC = 2y, CL = 6y$ . По теореме Пифагора из треугольников  $BMB_1$  и  $PBB_1$  получаем:

$$BB_1 = \sqrt{36y^2 - x^2} = \sqrt{36x^2 - y^2},$$

$$36y^2 - x^2 = 36x^2 - y^2 \Leftrightarrow 37y^2 = 37x^2 \Leftrightarrow x = y,$$

то есть  $AB = BC$ , поэтому четырехугольник  $ABCD$  — квадрат по определению.

б) Пусть  $x = y = a$ . Из пункта а) известно, что  $BB_1 = \sqrt{35}a$ . Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. Тогда в выбранной системе отсчета верны следующие координаты:

$$B(0; 0; 0),$$

$$C(0; 2a; 0),$$

$$O(a; a; a\sqrt{35}),$$

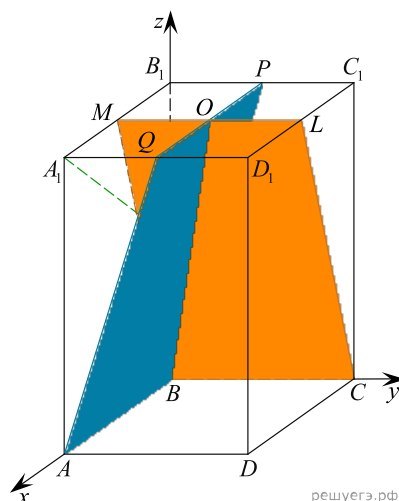
$$A_1(2a; 0; a\sqrt{35}),$$

$$\overrightarrow{A_1C}(-2a; 2a; -a\sqrt{35}).$$

Уравнение плоскости  $BDC$  имеет вид  $Ax + By + Cz = 0$ , поскольку она проходит через начало координат. Подставляя координаты точек  $C$  и  $O$ , находим:

$$\begin{cases} 2a \cdot B = 0, \\ a \cdot A + a \cdot B + a\sqrt{35} \cdot C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = -\sqrt{35}C. \end{cases}$$

Полагая  $C = 1$ , находим нормаль к плоскости  $BDC$ :  $\vec{n}(-\sqrt{35}; 0; 1)$ .



решуегэ.рф

Пусть угол  $\varphi$  — искомый, тогда

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{|\vec{n} \cdot \vec{A_1C}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{A_1C}|} = \frac{|2a\sqrt{35} - a\sqrt{35}|}{\sqrt{35+0+1} \cdot \sqrt{4a^2+4a^2+35a^2}} = \frac{a\sqrt{35}}{6a\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{1505}}{258}, \quad \sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{A_1C}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{A_1C}|} = \frac{|2a\sqrt{35} - a\sqrt{35}|}{\sqrt{35+0+1} \cdot \sqrt{4a^2+4a^2+35a^2}} = \\ &= \frac{a\sqrt{35}}{6a\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{1505}}{258}, \quad \sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{A_1C}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{A_1C}|} = \\ &= \frac{|2a\sqrt{35} - a\sqrt{35}|}{\sqrt{35+0+1} \cdot \sqrt{4a^2+4a^2+35a^2}} = \\ &= \frac{a\sqrt{35}}{6a\sqrt{43}} = \frac{\sqrt{1505}}{258},\end{aligned}$$

и потому  $\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{1505}}{258}$ .

**№ 15.**

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                               | Баллы |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                     | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.                                                                                                                                 | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                             | 2     |

**Решение.** Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3\right)^{x^2-x-7} &> \frac{4}{x^2-6x+12} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-6x+9+3}{4}\right)^{x^2-x-7} > \frac{4}{x^2-6x+9+3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{x^2-x-7} &> \frac{4}{(x-3)^2+3} \Leftrightarrow \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{x^2-x-7} - \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{-1} > 0. \\ \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3\right)^{x^2-x-7} &> \frac{4}{x^2-6x+12} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-6x+9+3}{4}\right)^{x^2-x-7} > \frac{4}{x^2-6x+9+3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{x^2-x-7} &> \frac{4}{(x-3)^2+3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{x^2-x-7} - \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{-1} &> 0. \left(\frac{x^2}{4} - \frac{3x}{2} + 3\right)^{x^2-x-7} > \frac{4}{x^2-6x+12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-6x+9+3}{4}\right)^{x^2-x-7} &> \frac{4}{x^2-6x+9+3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{x^2-x-7} &> \frac{4}{(x-3)^2+3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{x^2-x-7} - \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{-1} &> 0.\end{aligned}$$

Применим метод рационализации: на ОДЗ выражения  $f(x)^{g(x)} - f(x)^{h(x)}$  и  $(f(x)-1)(g(x)-h(x))$  имеют один знак. Получаем:

$$\begin{aligned}\left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{x^2-x-7} - \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{-1} &> 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{(x-3)^2+3}{4} - 1\right)(x^2-x-7-(-1)) &> 0 \Leftrightarrow ((x-3)^2-1)(x^2-x-6) > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x-3-1)(x-3+1)(x-3)(x+2) &> 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2)(x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ 2 < x < 3, \\ x > 4. \end{cases} \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{x^2-x-7} - \left(\frac{(x-3)^2+3}{4}\right)^{-1} > 0 \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left( \frac{(x-3)^2+3}{4} - 1 \right) (x^2-x-7-(-1)) > 0 \Leftrightarrow ((x-3)^2-1)(x^2-x-6) > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x-3-1)(x-3+1)(x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x-4)(x-2)(x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ 2 < x < 3, \left( \frac{(x-3)^2+3}{4} \right)^{x^2-x-7} - \left( \frac{(x-3)^2+3}{4} \right)^{-1} > 0 \Leftrightarrow \\ x > 4. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left( \frac{(x-3)^2+3}{4} - 1 \right) (x^2-x-7-(-1)) > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x-3)^2-1)(x^2-x-6) > 0 \Leftrightarrow (x-3-1)(x-3+1)(x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x-4)(x-2)(x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ 2 < x < 3, \left( \frac{(x-3)^2+3}{4} \right)^{x^2-x-7} - \left( \frac{(x-3)^2+3}{4} \right)^{-1} > 0 \Leftrightarrow \\ x > 4. \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left( \frac{(x-3)^2+3}{4} - 1 \right) (x^2-x-7-(-1)) > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow ((x-3)^2-1)(x^2-x-6) > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x-3-1)(x-3+1)(x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x-4)(x-2)(x-3)(x+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ 2 < x < 3, \\ x > 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ:  $(-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$ .

## № 16.

| Критерии оценивания выполнения задания                              | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                    | 2     |
| Верно построена математическая модель                               | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                            | 2     |

Решение. Пусть у Степана было  $x$  тыс. руб., первый банк дает  $a\%$  годовых, второй —  $b\%$  годовых. Тогда в конце года сумма вклада в первом банке увеличится в  $m = 1 + 0,01a$  раз, а во втором банке — в  $n = 1 + 0,01b$  раз.

Степан положил в первый и второй банк  $60\%$  и  $40\%$  своего капитала, по прошествии одного года на счетах в банках было  $0,6xm + 0,4xn = 590$  тыс. руб. соответственно. Если бы Степан первоначально положил  $40\%$  капитала в первый банк, а  $60\%$  капитала во второй банк, то через год на счетах было бы  $0,4xm + 0,6xn = 610$  тыс. руб.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 0,6xm + 0,4xn = 590, \\ 0,4xm + 0,6xn = 610, \end{cases}$$

относительно  $xm$  и  $xn$  находим:  $xm = 550$ ,  $xn = 650$ ,  $\frac{m}{n} = \frac{11}{13}$ ,  $m = \frac{11}{13}n$ .

К концу второго года сумма вкладов достигла величины

$$\begin{aligned}
0,6xm^2 + 0,4xn^2 &= 0,6 \cdot 550 \cdot m + 0,4 \cdot 650 \cdot n = 330 \cdot \frac{11}{13}n + 260n = \frac{3630n}{13} + 260n = \frac{7010}{13}n. \\
0,6xm^2 + 0,4xn^2 &= 0,6 \cdot 550 \cdot m + 0,4 \cdot 650 \cdot n = \\
&= 330 \cdot \frac{11}{13}n + 260n = \frac{3630n}{13} + 260n = \frac{7010}{13}n.
\end{aligned}$$

По условию, она равна 701 тыс. руб., откуда имеем:

$$\frac{7010}{13}n = 701 \Leftrightarrow n = 1,3.$$

Тогда  $m = 1,1$ ,  $x = 500$ , а искомая величина суммы вклада к концу второго года при вложении 40% капитала в первый банк и 60% во второй равна

$$0,4xm^2 + 0,6xn^2 = 0,4 \cdot 500 \cdot 1,1^2 + 0,6 \cdot 500 \cdot 1,3^2 = 242 + 507 = 749 \text{ тыс. руб.}$$

Ответ: 749 000 руб.

№ 17.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                            | Баллы |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)                                                                                                                                                                                | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б)<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                      | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а)<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                 | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3     |

Решение. а) Пусть  $F$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $D$  на прямую  $AB$ , тогда  $DH = DF$ . В равнобедренном треугольнике  $EAD$  угол  $AED$  равен  $30^\circ$ . В прямоугольном треугольнике  $EFD$  находим  $DP = \frac{1}{2}DE$ , откуда получаем, что  $FH = 2DH$ .

б) Пусть  $AM$  — высота треугольника  $ABC$  — пересекает  $ED$  в точке  $N$ . Тогда

$$AM = AB \cdot \sin \angle ABC = 2, BC = 2AB \cdot \cos \angle ABC = 4\sqrt{3}.$$

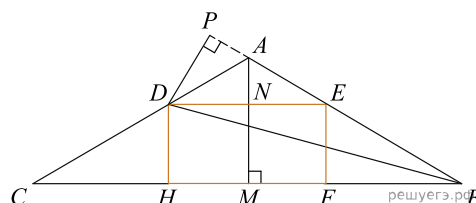
Пусть  $DH = EF = x$ , тогда  $FH = ED = 2x$ . Треугольники  $ABC$  и  $AED$  подобны, следовательно,

$$\frac{AN}{AM} = \frac{ED}{BC} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2} = \frac{2x}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{3}.$$

Значит, площадь прямоугольника  $DEFH$  равна

$$DE \cdot DH = 2x \cdot x = 2(3 - \sqrt{3})^2 = 24 - 12\sqrt{3}.$$

Ответ:  $24 - 12\sqrt{3}$ .



Приведем решение пункта а) Сергея Федорова.

Треугольник  $ABC$  равнобедренный, следовательно,

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 30^\circ.$$

Углы  $BDE$  и  $DBC$  равны как накрест лежащие, угол  $DBC$  равен углу  $DBE$ , поскольку  $BD$  является биссектрисой, следовательно, углы  $BDE$  и  $DBE$  равны, тогда треугольник  $DBE$  равнобедренный,  $DE = BE$ . В треугольнике  $BFE$  катет  $EF$  лежит против угла в  $30^\circ$ , следовательно,  $BE = 2EF$ , тогда  $DE = 2EF$ .

№ 18.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Баллы    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 4        |
| С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но допущен недочет                                                                                                                                                                                                                                                                | 3        |
| С помощью верного рассуждения получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом верно выполнены все шаги решения.<br>ИЛИ<br>в решении верно найдены все граничные точки множества значений параметра, но неверно определены промежутки значений                                                                                          | 2        |
| В случае аналитического решения: задача верно сведена к набору решенных уравнений и неравенств с учетом требуемых ограничений.<br>ИЛИ<br>в случае графического решения: задача верно сведена к исследованию взаимного расположения линий (изображены необходимые фигуры, учтены ограничения, указана связь исходной задачи с построенными фигурами) | 1        |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0        |
| <b>Максимальный балл</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <b>4</b> |

Решение. Преобразуем неравенство:

$$\begin{aligned}
 \log_a^2(ax) - \log_a x \leq 7 &\Leftrightarrow \log_a^2(ax) - \log_a x \leq 7 \Leftrightarrow (1 + \log_a x)^2 - \log_a x \leq 7 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_a^2 x + \log_a x - 6 \leq 0 &\Leftrightarrow -3 \leq \log_a x \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^3} \leq x \leq a^2, & \text{при } a > 1, \\ \frac{1}{a^3} \geq x \geq a^2 & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases} \quad \log_a^2(ax) - \log_a x \leq 7 \Leftrightarrow \log_a^2(ax) - \log_a x \leq 7 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (1 + \log_a x)^2 - \log_a x \leq 7 &\Leftrightarrow \log_a^2 x + \log_a x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow -3 \leq \log_a x \leq 2 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^3} \leq x \leq a^2, & \text{при } a > 1, \\ \frac{1}{a^3} \geq x \geq a^2 & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases} \quad \log_a^2(ax) - \log_a x \leq 7 \Leftrightarrow \log_a^2(ax) - \log_a x \leq 7 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (1 + \log_a x)^2 - \log_a x \leq 7 &\Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \log_a^2 x + \log_a x - 6 \leq 0 &\Leftrightarrow -3 \leq \log_a x \leq 2 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^3} \leq x \leq a^2, & \text{при } a > 1, \\ \frac{1}{a^3} \geq x \geq a^2 & \text{при } 0 < a < 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

При  $a > 1$  ни одно из решений не принадлежит отрезку  $[2; 8]$ , если

$$\begin{cases} a > 1, \\ \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{a^3} > 8, \\ a^2 < 2 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a < \sqrt{2}. \end{cases}$$

При  $0 < a < 1$  ни одно из решений не принадлежит отрезку  $[2; 8]$ , если

$$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{a^3} < 2, \\ a^2 > 8 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 1, \\ \frac{1}{a^3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a < 1. \end{cases}$$

Объединяя результаты, получаем ответ.

Ответ:  $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; 1\right) \cup (1; \sqrt{2})$ .

## № 19.

| Критерии оценивания выполнения задания                                                                                                                                                                        | Баллы |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты                                                                                                                                          | 4     |
| Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов                                                                                                                                      | 3     |
| Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов                                                                                                                                      | 2     |
| Верно получен один из следующий результатов:<br>— обоснованное решение пункта а;<br>— обоснованное решение пункта б;<br>— оценка в пункте в;<br>— пример в пункте в, обеспечивающий точность найденной оценки | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                           | 0     |
| <i>Максимальный балл</i>                                                                                                                                                                                      | 4     |

Решение. а)Предположим, что продавались всего три книги, которые первоначально стоили 120, 94 и 20руб. Средняя цена «выгодных» книг составляет

$$\frac{94+20}{2} = 57 \text{ руб.}$$

После увеличения цены книги стали стоить 130, 104 и 30руб. Теперь средняя цена «выгодных» книг составляет 30руб.

б)В примере из предыдущего пункта первоначально средняя цена «невыгодных» книг составляет 120руб., а после увеличения

$$\frac{130+104}{2} = 117 \text{ руб.}$$

в)Пусть всего привезли  $n$  книг. Первоначально «выгодных» было  $x$  книг, после увеличения цены выгодных стало  $y$  книг. Средняя цена

всех книг после увеличения составляет 120руб. Получаем два уравнения:

$$110n = 226(n - x) + 81x$$

и

$$120n = 210(n - y) + 90y,$$

откуда  $116n = 145x$ , то есть  $4n = 5x$ , и  $90n = 120y$ , то есть  $3n = 4y$ . Поэтому число  $n$  кратно 4 и 5, то есть кратно 20. Таким образом,  $n \geq 20$ .

Покажем, что возможен случай  $n \neq 20$ . Пусть первоначально было 15 книг по 80руб., одна книга — по 96руб. и четыре книги по 226руб. Тогда средняя цена всех книг 110руб., средняя цена книг с биркой «выгодно» 81руб., а средняя цена книг без бирки — 226руб. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90руб., а средняя цена книг без бирки — 210руб. Все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 20.

---